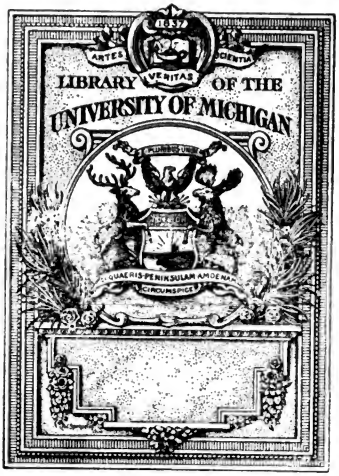
B 491595

Digitized by Google


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MATHEMATICS
QA
32
.F443
1954

Digitized by Google

Digitized by Google

TRE SCRITTI INEDITI

DI

LEONARDO PISANO

Digitized by Google

Digitized by Google

TRE SCRITTI INEDITI

DI

LEONARDO PISANO

PUBBLICATI

DA BALDASSARRE BONCOMPAGNI

SECONDO LA LEZIONE

DI UN CODICE DELLA BIBLIOTECA AMBROSIANA DI MILANO

Leonardo Pisano

FIRENZE

TIPOGRAFIA GALILEIANA

di M. Cellini e C.

1854

Digitized by Google

Incipit Flos Leonardi Bigolli pisani super solutionibus quarumdam questionum ad numerum et geometriam vel ad utrumque pertinentium.

Intellecto, beate pater et domine venerande R. dei gratia sce Mar. Incosmidin diac. Card. dignissime, quod meorum operum copiam non preceptive saltim, quod vos magis decebat, sed simpliciter petere fuistis per litteras vestre sanctitatis dignati; nihilominus tamen petitionem ipsam reverenter suscipiens in mandatis, non solum parere voto vestro sategi devotius in hac parte, verum etiam de quarumdam solutionibus questionum a quibusdam philosophis serenissimi domini mei Caesaris, et aliis per tempora mihi oppositarum, et plurium que subtilius quam in libro maiori de numero, quem conposui, sunt solute, ac de multis quas ipse met adinveni; ex diffusa quidem multitudine conpilans hunc libellum ad laudem et gloriam nominis vestri conpositum, florem ideo volui titulari, quia illa vobis florida clericorum elegantia radiantibus dictavi, atque etiam quia ibi nonnulle sunt floride quamquam nodose apposite

236380

Digitized by Google

questiones, tanquam geometrice quam aritmetrice indagatione vigili sic probabiliter enodate, ut nedum non solum floreant in se ipsis, immo et quod per eas, velut ex radicibus plantule, emergunt innumere questiones, quibus interdum vacare, si degnabimini, poteritis si placebit inter curas et occupationes vestras ob otiositate illa, que virtutum est noverca, vacando sub exercitatione ingenii, solatia etiam nec sterilia sed officiosa captare. Si autem hoc novero a vestre clementie benignitate acceptari, quidquid amene subtilitatis vel utilitatis ulterius adinvenero, eidem operi, ut vestram merear gratiam adipisci, obnoxius cumulabo, eadem et me ipsum correctioni dominationis vestre affectuosius supponendo.

Explicit prologus incipit tractatus eiusdem.

Cum coram maiestate vestra, gloriosissime princeps Frderice, magister Johannes panormitanus, phylosophus vester, pisis mecum multa de numeris contulisset, interque duas questiones, que non minus ad geometriam quam ad numerum pertinent, proposuit, quarum prima fuit ut inveniretur quadratus numerus aliquis, cui addito vel diminuto
fol. 1 verso quinario | numero, egrediatur quadratus numerus, quem quadratum numerum, ut eidem magistro Johanni retuli, inveni esse hunc numerum, undecim et duas tertias et centesimam quadragesimam quartam unius. Cuius numeri radix est ternarius et quarta et VI[a] unius, cui quadrato numero si addantur quinque provenient XVI, et due tertie et una centesima quadragesima quarta, qui numerus est quadratus, cuius radix est quatuor et una duodecima. Item

Digitized by Google

si auferantur V ab eodem quadrato numero, remanebunt VI et due tertie et una centesima quadragesima quarta, qui numerus etiam quadratus est, cuius radix est duo et tertia et quarta unius. Et cum diutius cogitassem unde oriebatur predicte questionis solutio, inveni ipsam habere originem ex multis accidentibus, que accidunt quadratis numeris et inter quadratos numeros, quare hinc sumens materiam libellum incepi conponere ad vestre maiestatis celsitudinis gloriam, quem libellum quadratorum intitulavi, in quo continebuntur rationes et probationes, geometrice solutiones questionis predicte, et multarum aliarum questionum solutiones, quem habere poterit vestram mensitas, si celsitudini vestre placuerit.

Altera vero questio a predicto magistro Johanne proposita fuit, ut inveniretur quidam cubus numerus, qui cum suis duobus quadratis et decem radicibus in unum collectis essent vigenti ex his que continentur in X.° libro Euclidis, et ob hoc super ipso X.° Euclidis accuratius studui, adeo quod sinteoremata ipsius memorie conmendavi, et ipsarum intellectum comprehendi. Et quia difficilior est antecedentium et quorumdam sequentium librorum Euclidis, ideo ipsum X.^{m} librum glosare incepi, reducens intellectum ipsius ad numerum, qui in eo per lineas et superficies demonstratur; qui liber X.^{m} tractat de diversitatibus XV linearum rectarum, quarum XV linearum due vocantur rite seu ratiocinate, relique XIII dicuntur aloge sive inratiocinate. Ex his duobus ritis, una dicitur riti seu ratiocinata longitudine et potentia, alia vero potentia solum. Per primam ex his duabus intelligitur numerus qui potest numerari, ut unus, duo, tres, et ceteri; vel partes unita-

Digitized by Google

tis, ut medietas, tertia, et quarta, et cetere fractiones, que
fol. 2 recto omnes sunt radices | quadratorum numerorum. Per secundam intelliguntur radices numerorum ratiocinatorum non quadratorum, unde potentia earum radicum numeratur, et ipse radices numerari non possunt, et ideo vocantur numeri surdi. Et ex XIII.im predictis lineis prima est simplex, que vocatur media, per quam intelligitur radix radicis numeri non quadrati; et ex reliquis, sex sunt radices numerorum binomiorum, hoc est duorum nominum, relique sunt radices recisorum. Ex duobus quidem nominibus sunt numeri compositi ex numero et radice, vel ex duabus radicibus, que compositio fit sex modis. Recisus quidem numerus dicitur residuum, quod est inter numerum et radicem, vel inter duas radices, quod etiam fit sex aliis modis, ut Euclides dicit. Et cum studiose super hos quindecim numeros, et super eorum diversitates cogitarem, inveni nullum ipsorum congruere posse uni ex X radicibus supradictis, que cum duobus quadratis et cubo sint XX, ut in sequentibus geometrice demonstratur.

Adiaceat quidem linea *a b* (1) pro una ex dictis decem radicibus, cui applicetur superficies rectiangula *b d* latitudinem faciens rectam *d g*, que sit X. Et recte quidem *b g* applicetur superficies rectiangula *e g* equalis cubo, qui fit a numero *a b*. Rursus recte *e z* aplicetur paralilogramum orthogonium ⌈ *z* equale duobus quadratis, qui fiunt a numero *a b*; erit ergo tota *a t* superficies rectiangula et equalis XX; sunt enim anguli *a b g* et *g b e* recti, quare indirecto est linea *b e* linee *b a*. Similiter demonstrabitur in-

(1) Vedi Fig. 1.

Digitized by Google

directo esse linea *e* ∫ linee *e b*. Quare tota *a c* linea recta est et continua, similiter et linea *d t* est recta, paralilogramum ergo est superficies *a t*, et est orthogonium, cum omnes anguli ipsius sint recti, et est X unaqueque linearum *a d* ∫ *e z c t*. Verum quoniam linea *a b* est una ex supracriptis X radicibus, erit superficies *a g* equalis X radicibus predictis, cum linea *b g* sit X. Siquidem et superficies *b z* est equalis cubo, qui fit a radice *a b*, et superficies itaque *e t* est equalis duobus quadratis, quorum unusquisque sit ab eadem radice *a b*. Ergo tota superficies *a t* continetur ex uno cubo et ex duobus quadratis et X radicibus, qui omnes coniuncti esse xx proponuntur, quare superficies *a t* est XX. Et quoniam unumquodque laterum *a d* et *c t* est X, erit unumquodque laterum *a c* et *d t* duo, cum superficies *a t* sit XX. Dico primum itaque radicem *a b* esse non posse ex numeris | ratiocinatis, fol. 2 verso
neque ex radicibus ratiocinatorum, vel ex radicibus radicum ratiocinatorum, seu ex sex numeris coniunctis, aut ex sex numeris residuis suprascriptis, neque ex radicibus coniunctorum vel recisorum. Et si possibile est, esto primum radix *a b* ex numeris, qui sunt ratiocinati longitudine et potentia. Et quoniam tota *a c* est duo, et *a b* minor est quam *a c*, ergo radix *a b* minus est binario, et quia positum est ipsam *a b* esse ex numeris ratiocinatis, aut enim est integer numerus *a b*, aut fractus. Esto prius integer si est possibile, et quoniam nullus numerus integer est minor binario nisi unitas, erit ergo radix *a b* unum; quare superficies *b d* erit X, et cubus, qui fit ab unitate *a b*, scilicet superficies *b z*, erit unum. Item et duo quadrati, qui sunt ab unitate *a b*, scilicet superficies *c z*,

Digitized by Google

erunt duo, quare tota superficies *a t* erit XIII tantum. Sed superficies *a t* est XX, non ergo radix *a b* est numerus integer. Similiter ostendetur quod numerus *a b* non est fractus. Si fractus enim est numerus *a b*, cum cubicatur egrediuntur ex illa cubicatione fractiones, et fractiones fractionis, et fractiones fractionis fractionis, et cum multiplicatur in se numerus *a b*, si est fractus, egreditur ex duplo multiplicationis eius fractio fractionis, vel fractiones fractionis. Et cum multiplicatur idem numerus ruptus, scilicet *a b* in *b g*, scilicet in X, egredietur quandoque fractio vel fractiones tantum, et quandoque egredietur numerus integer ex ipsa multiplicatione. Cum itaque multiplicatur *a b* in *b g* provenit numerus *b d*, et cum cubicatur numerus *a b* provenit numerus *b z*, et cum duplicatur multiplicatio numeri *a b* in se provenit numerus *e t*. Ergo si fractus est numerus *a b* occurrit quandoque in numero *b d* fractio aliqua, vel fractiones tantum, et in numero quidem *b z* occurrunt fractiones, et fractiones fractionis, et fractiones fractionis fractionis, et in numero quoque *e t* occurrunt fractiones et fractiones fractionis tantum, unde coniungantur fractiones que sunt in numeris *b d* et *b z* et *z c*, nunquam ex ipsorum coniunctione poterit numerus integer procreari. Quare si fractus est numerus *a b*, fractus erit numerus *d c*, qui est XX, quod est inconveniens. Et si numerus *b d* est sine fractione, reliquus *b t* erit similiter sine fractione, cum totus numerus *a c* sit XX, quod non perveniet cum in numero *e t* sint fractiones, et fractiones fractionis, et in numero *b z* sint fractiones et fractiones fractionis et fractiones fractionis fractionis. Non ergo fractus est numerus *a b*, neque integer. | Ostendam rursus impossibile

fol. 3 recto

Digitized by Google

esse quod numerus *a b* (1) sit radix alicuius numeri ratiocinati; ducatur quidem *a b* in se, et proveniat numerus *b k*, et ex *b k* in *b a* provenit superficies rectiangula *a k*, que superficies est equalis cubo, qui fit a numero *a b*. Quare superficies *k a* equalis est superficiei *b z*, equalium vero et unum uni equalem habentium angulum parallilogramorum contrarie potiuntur latera, que circa equales angulos subtenduntur, ut in VI.° Euclidis reperitur. Ergo est sicut *g b* ad *b k*, ita *a b* ad *b e*, et cum quatuor quidem quantitates proportionales sunt, fueritque sicut prima ad secundam, ita tertia ad quartam, et prima fuerit secunde conmensurabilis, et tertia quarte conmensurabilis erit, ut in X.° Euclidis reperitur. Est enim recta *a b* radix numeri, quare quadratus qui fit ab ea, scilicet numerus *b k*, est ratiocinatus, et *g b* est decem, qui est ratiocinatus. Ergo primus numerus *g b* conmensurabilis est secundo *b k*, quare et *a b* numerus, numero *b e* conmensurabilis est. Est enim *a b* radix numeri ratiocinati, quare et *b e* est radix numeri ratiocinati. Et quia *a b* conmesurabilis est *b e*, erit ergo *a b* toti *a e* conmensurabilis, quare *a e* est radix numeri ratiocinati et est conmensurabilis potentia solum toti *a c* numero, scilicet binario. Quare si a binario *a c* auferatur radix *a e*, qui sunt potentia solum ratiocinati, remanebit *e c* abscisio, sive recisum, quod inratiocinatum esse ab Euclide in X.° demonstratur. Sed quia ex ductu *a b* in se provenit numerus ratiocinatus, scilicet dimidium superficiei *e t*, erit ergo tota superficies *e k* ratiocinata, cuius unum

(1) Vedi Fig. 2.

Digitized by Google

latus *e z* est ratiocinatum, quod est decem. Quare latus *e c* est ratiocinatum, quod superius ostensum est esse inratiocinatum, unde impossibile est quod radix *a b* sit radix numeri ratiocinati, ut predixi.

Aliter, quia linea *a e* est radix numeri ratiocinati, ut ostensum est, et linea *e z* est numerus ratiocinatus, erit superficies *d e* radix numeri, et superficies *e t* est numerus ratiocinatus. Quare tota superficies *d i* constat ex numero inratiocinato et ratiocinato, quod est inconveniens, cum superficies *d i* sit XX. Amplius dico quod radix *a b* non est radix radicis alicuius numeri. Sed si possibile est, esto *a b* (1) radix radicis alicuis ratiocinati, et ex
fol. 3 verso ductu item *a b* in se | proveniat *b k*, et ex *a b* in *b k* provenit superficies *k a*, que est equalis superficiei *b z*, hoc est cubo, qui fit a radice *a b*. Quare est sicut *g b* ad *b k*, ita et *a b* ad *b e*. Et quoniam *a b* est radix radicis numeri ratiocinati, erit ergo *b k* radix radicis numeri ratiocinati, quare *g b* et *b k* numeri conmensurabiles sunt potentia solum, et *a b* et *b e* conmensurabiles sunt similiter potentia tantum. Media enim est linea *a b*, hoc est radix radicis numeri ratiocinati, media ergo erit et linea *b e*, et inconmensurabilis linee *b a* longitudine. Quare tota *a e* sit ex duabus mediis potentia solum conmensurabilibus, ergo *a e* est una ex duabus bimedialibus lineis, scilicet radix unius ex conpositis numeris supradictis. Item ex ductu *a b* in se provenit dimidium superficiei *e t*, scilicet superficies *l i*, que superficies aplicata est linee ratiocinate *l e*, que est quinque;

(1) Vedi Fig. 3.

Digitized by Google

et quia quod a media secundum ritim et ductum, latitudinem facit ritim et incomensurabilem ei cui adiacet longitudine ratiocinata, riti ergo est recta *e c*, et incomensurabilis recte *l e* longitudine, ergo radix numeri ratiocinati est linea *e c*, et est incomensurabilis linee *a c* longitudine, potentia enim solum sunt conmensurabiles. Quare reliquum *a e* recisum est, hoc est abscisio. Nulla enim abscisio est binomia, ut in eodem X.° reperitur. Quare cum superius ostensa sit linea *a e* esse bimedialis, que modo invencta est abscisio, et quia nullum recisum bimediale, constat lineam *a b* non posse esse radicem radicis numeri ratiocinati, quod oportebat ostendere Ostendam rursus unam ex predictis radicibus, scilicet lineam *a b* esse non posse aliquam ex lineis conpositis, vel depositis, nec ex earum radicibus; sed antequam ad huius rei probationem perveniam, volo proprietates ipsarum linearum denotare. Per primam quidem ex sex lineis conpositis intelligitur conpositum ex numero et radice, cuius numeri potentia superhabundat potentiam radicis secundum quantitatem alicuius numeri quadrati, ut si conponatur quaternarius cum radice septenarii, potentia quaternarii est XVI, et potentia radicis de VII est VII, et sic potentia quaternarii addit VIIII, super potentiam radicis de VII, qui novenarius quadratus est, et eius radix est III. Per secundam vero intelligitur conpositio | radicis et numeri, cuius radicis quadratus potest super quadratum ipsius numeri secundum quantitatem alicuius numeri habentis proportionem ad quadratum ipsius radicis, eam quam habet quadratus numerus ad quadratum numerum, ut si maius nomen sit radix de CXII, minus sit VII, tunc residuum quod est a *fol. 4 recto*

Digitized by Google

quadrato septenarii, scilicet a XLVIIII in CXII, idest LXIII, habet proportionem ad CXII, sicut quadratus numerus VIIII, ad quadratum numerum XVI. Per tertiam quoque intelligitur conpositio duarum radicum diversorum numerorum non habentium proportionem ad invicem, sicut quadratus numerus ad quadratum numerum, et maius nomen potest plus minore, quod a conmensurabili sibi longitudine, hoc est quod differentia, que est inter utrumque quadratum ipsarum radicum habeat proportionem ad quadratum maioris radicis, sicuti quadratus numerus ad quadratum numerum; ut si primum nomen fuerit radix de XVIII, secundum de X, differentia que est a XVIII usque in X, scilicet VIII, habet proportionem ad XVIII, eam quam habet quadratus numerus IIII ad quadratum numerum VIII. Per quartam siquidem intelligitur conpositum ex numero et radice, qui numerus potest plus ipsa radice, eo quod ab inconmensurabili sibi longitudine, hoc est quod differentia, que est inter quadratum ipsius numeri et quadratum radicis, non sit quadratus numerus, ut accidit de quaternario et radice sexnarii. Per quintum autem intelligitur conpositum ex radice alicuius numeri non quadrati, et ex aliquo numero, in quo quadratus radicis potest plus quadrato illius numeri secundum quantitatem numeri non habentis proportionem ad quadratum radicis sicuti quadratus numerus ad quadratum numerum, et conpositum ex radice sexnarii et ex binario. Per sextam namque intelligitur compositum ex duabus radicibus diversis, quarum maior potest plus minore secundum quantitatem numeri non habentis proportionem ad quadratum maioris radicis, sicuti quadratus numerus ad quadratum numerum, ut est compositum ex radice octonarii et radi-

Digitized by Google

ce quinarii, horum quippe sex binomiorum radices habentur ex ordine sic. Primi quidem binomii radix est aliqua ex predictis sex lineis binomiis, quia cum multiplicatur numerus binomialis in se, nimirum ex ipsa multiplicatione primum binomium surgit. Radix quippe secundi binomii dicitur bi~~nomi~~alis prima, que componitur ex duabus radicibus radicis potentia solum conmensurabilibus | numerum continentibus, hoc est cum multiplicatur una earum in aliam provenit inde numerus ratiocinatus, ut si prima fuerit radix radicis de VIII. et alia radix radicis duorum, provenit ex earum multiplicatione radix radicis de XVI, scilicet II. Tertii autem binomii radix est linea que dicitur bimedialis secunda, que componitur ex duabus radicibus radicis potentia solum conmensurabilibus, medium, scilicet radicem numeri, continentibus, hoc est cum multiplicatur una earum in aliam, id quod provenit est radix numeri non quadrati, ut si prima fuerit radix radicis XII, secunda radix radicis trium, ex quarum multiplicatione surgit in radicem sexnarii, scilicet in radicem radicis de XXXVI. Quarti quoque binomii radix est linea que dicitur maior, que componitur ex duabus lineis potentia conmensurabilibus, quarum quadrati insimul coniuncti faciunt numerum ratiocinatum, et ex multiplicatione unius in aliam provenit numerus inratiocinatus, scilicet radix numeri, ut si prima fuerit radix de IIII, et ex radice de XIII, et alia fuerit radix de IIII, minus radice de XIII. Quinti siquidem binomii radix est linea que dicitur riton et medium potens, hoc est super ratiocinatum et inratiocinatum numerum, que componitur ex duabus lineis potentia inconmensurabilibus, quarum quadrati insimul iun-

fol. 8 verso

Digitized by Google

cti faciunt radicem numeri, et ex multiplicatione unius in aliam provenit numerus ratiocinatus, ut si prima fuerit radix radicis de XX et ex duobus, et alia fuerit radix de XX minus II. Sexti autem binomii radix est linea que dicitur potens super duos inratiocinatos numeros, que componitur ex duabus lineis potentia inconmensurabilibus, quarum quadrati insimul iuncti faciunt numerum inratiocinatum, et ex multiplicatione unius in aliam surgit similiter numerus inratiocinatus, ut si prima fuerit radix radicis de XXIIII et de radice de VII, et alia fiat radix radicis de XXIIII minus radice de VII, hoc est cum multiplicatur prima ipsarum duarum linearum in se provenit radix de XXIIII et radix de VII, et cum multiplicatur secunda in se provenit radix de XXIIII minus radice de VII.

Similiter VI numeri, qui dicuntur recisi seu apothami, inmitantur seriem sex binomiorum suprascriptorum ordinate. Nam primum recisum constat ex numero minus radice. Secundum ex radice minus numero. Tertium ex radice minus radice. Quartum constat ex nominibus primi. | Quintum ex nominibus secundi. Sextum ex nominibus tertii. Sed in tribus prioribus recisis maiora nomina possunt plus minoribus eo, quod a conmensuralibus longitudine in reliquis, quod ab inconmensurabilibus. Nam radix primi recisi est aliquod suprascriptorum recisorum; radix vero secundi est recisum binomialis prime, hoc est radix radicis minus radice radicis, ex quarum multiplicatione provenit numerus ratiocinatus. Tertii autem radix est recisum binomialis secundi, hoc est radix radicis minus radice radicis, ex quarum multiplicatione provenit numerus inratiocinatus. Quarti quoque recisi radix est que constat ex

fol. 8 recto

Digitized by Google

residuo quod est inter duas lineas, que sunt potentia incomensurabiles, ex quibus conponitur linea maior. Quinti itaque recisi radix est que constat ex residuo quod est inter duas lineas potentia inconmensurabiles, ex quibus conponitur linea potens super ratiocinatum et inratiocinatum. Sexti itaque recisi radix est que constat ex residuo quod est inter duas lineas potentia inconmensurabiles, ex quibus conponitur linea potens super ratiocinatum et inractiocinatum. His omnibus terminatis, dico nullum ex predictis numeris posse congrui uni ex X radicibus suprascriptis. Ad que demonstranda reiterabo figuram. Et si possibile est numerus *a b* (1), qui est una ex X radicibus suprascriptis, sit unum ex IIII binomiis qui conponuntur ex numero ratiocinato et radice numeri non quadrati, et dividatur numerus *a b* in nomina, et sit *b c* numerus, et *c a* sit radix numeri. Et multiplicetur *b a* in se, et proveniat *b k*, et ex *a b* in *b k* provenit superficies *a k*, que est equalis superficiei *b z*, scilicet cubo qui fit a linea *a b*. Comuniter addatur superficies *d b*, erit tota superficies *d e* equalis superficiei *d k*, que superficies continetur ex numero et radice tantum, ut in sequentibus demonstratur. Quoniam linea *b a* divisa in duo in puncto *c*, erunt duo quadrati linearum *b c* et *c a*, cum duplo *b c* in *c a*, equales quadrato totius *b a*. Quadrati enim *b c* et *c a* sunt ratiocinati, cum *b c* sit numerus et *c a* sit radix numeri ratiocinati, quare ipsi duo quadrati sunt numerus qui fit *b f*. Ergo ex duplo *b c* in *c a* provenit *f k*, cum *b k* proveniat ex *b a* in se, et quia ex duplo *b c* in *c a* provenit *f k*, et *b c* est

(1) Vedi Fig. 4.

Digitized by Google

numerus, est proportio *f k* ad *c a*, sicut numerus ad numerum. Quare conmensurabilis est *f k* linee *c a*. Dividitur itaque superficies *d k* in quatuor superficies rectiangulas *g o* et *o l* et *d o* et *o k*; et quia *g b* et *b f* sunt numeri,
fol. 5 verso numerus est ergo tota *g f*. Est enim et linea *f o* | numerus cum sit equalis linee *b c*, quare superficies *g o* est ratiocinata; et quia *f k* est conmensurabilis linee *c a* et linea *o p* conmensurabilis est linee *c a*, cum sit equalis linee *f k*, quare superficies *o l* est ratiocinata; numerus ergo sunt superficies *g o* et *o l*. Rursus quia numeri sunt *n o* et *o f* et *f k*, est conmensurabilis *c a*, conmensurabiles sunt superficies *d o* et *o k*. Quare superficies *d o* et *o k* constant ex radicibus sibi invicem conmensurabilibus, cum numeri sint *n o* et *o f*, et possunt congregari et reduci ad radicem unam, quia cum congregantur radices sibi invicem conmensurabiles, progreditur ex eorum congregatione radix numeri tantum; ergo tota superficies *d k* constat ex numero et radice, cui superficiei equalis est superficies *d e*, cum equalis sit superficies *z b* superficie *b l*, ergo et superficies *d e* constat ex numero et radice, similiter et superficies *e t* constat ex numero et radice cum sit duplum numeri *b k*. Quare tota superficies *d c* constat ex numero et radicibus, ergo non est numerus spatium *d i*, cum sit duarum vel plurium nominum. Non ergo linea *a b* est ex IIII binomialibus conpositis ex numero et radice. Sed si possibile est, esto rursus linea *a b* binomialis tertia vel sexta, scilicet conposita ex duabus radicibus diversis, cuius nomina sint item *b c* et *c a*; quare et ex *b a* provenit binomium primum, quod est *b k*, quo ducto in *b a* provenit spatium *b l*, quod est equale cubo *b z*. Quare tota

Digitized by Google

superficies *d k*, scilicet superficies *d a e g* constat ex ducto *g k* in *k l*, hoc est ex ducto numero et radice in duabus radicibus diversis. Nam *k l* equalis est linee *c a*, sed cum multiplicatur numerus et radix in radicibus diversis, nimirum diverse radices proveniunt. Quare tota superficies *d e* constat ex radicibus diversis, sed superficies *e t* constat ex numero et radice, scilicet ex duplo *b k*, quare tota superficies *d i* constat ex numero et radicibus, quod est inconveniens, cum superficies *d i* sit XX. Non ergo linea *a b* est binomia; similiter demonstrabitur non esse aliquod ex sex recisis supradictis. Quia si recisum esset linea *a b*, eisdem demonstrationibus que demonstrata sunt in binomiis, ostendetur tota superficies *d i*, aut ex numero minus radicibus, aut ex radicibus minus numero, ex quibus nunquam poterunt XX procreari. Dico rursus linea *b a* esse non posse ex radicibus binomiorum vel recisorum. Ostensum est | enim linea *a b* esse non posse binomiorum vel *fol. 6 recto*
recisorum, quare *a b* non erit radix primi binomii vel primi recisi, cum radix primi binomii sit binomium, et radix primi recisi sit recisum. Sed si possibile est, linea *b a* esto radix secundi binomii, ergo erit binomialis prima, cuius nomina sint iterum *b c* et *c a*, et proveniat iterum ex ductu *a b* in se numerus *b k*, qui est binomium secundum, cuius minus nomen sit *b h*, quod est numerus. Quare tota *g k* constat ex numero et radice. Ergo cum multiplicatur *g k* in *k l*, hoc est in *b a*, unde provenit superficies *d e*, que est equalis superficiei *d k*, tunc multiplicatur numerus et radix in radice numeri et radicis, ex qua multiplicatione provenit radix numeri et radicis, et fit ipsa multiplicatio sic. Multiplicatur tetragonum numeri *g k* in numerum *b k*,

Digitized by Google

cuius multiplicationis radix est quesitum. Ergo superficies *d e* est radix numeri et radicis, et superficies *e t* constat ex numero et radice, cum sit duplex numeri *b k*. Ergo tota superficies *d i* constat ex numero et radice, et ex radice numeri et radicis, ex quorum coniuntione nunquam potest numerus ratiocinatus procreari. Quare impossibile est linea *a b* esse radix secundi binomii, nec etiam erit quarti vel quinti binomii, quod eisdem demonstrationibus demonstratur, cum ipsa binomia constent similiter ex numero et radice. Sed si possibile est, esto linea *a b* radix tertii vel sexti binomii, et multiplicetur *a b* in se, et proveniat *b k*, quod est conpositum ex radicibus duorum diversorum numerorum. Quare tota *g k* est trium nominum, que multiplicata in *k l*, scilicet in radice numeri *b k*. provenit radix radicis numeri et radicum pro superficie *d e*; sed superficies *e t* constat ex duabus radicibus, quare tota superficies *d i* est inratiocinata. Similiter eisdem demonstrationibus demonstrabitur, quod linea *a b* non est radix alicuius recisi, quia si esset radix secundi vel quarti aut quinti recisi, esset itaque superficies *d e* radix numeri minus radice, vel radix radicis minus numero, scilicet quod superficies *d e* esset radix secundi vel quarti vel quinti recisi, et superficies *e t* esset numerus minus radice, vel radix minus numero, qui insimul nequaquam faciunt numerum ratiocinatum. Similiter si linea *a b* esset radix tertii vel sexti recisi, esset itaque superficies *d e* radix radicis numeri minus radice radicum, vel esset radix radicis radicum minus radice numeri, ex quarum superficie *e t*
fol. 6 vers. nullatenus posset numerus ratiocinatus provenire. Ergo | linea *a b*, ut demonstratum est, non est aliqua ex quinde-

Digitized by Google

cim lineis, de quibus fit mentio in X°. Euclidis. Et quia hec questio solvi non potuit in aliquo supracriptorum, studui solutionem eius ad propinquitatem reducere, et inveni ex X radicibus nominatis, scilicet numerum *a b*, secundum propinquitatem esse unum et minuta XXII et secunda VII et tertia XLII et quarta XXX et quinta IIII et sexta XL.

De tribus hominibus pecuniam comunem habentibus.

Tres homines habebant pecuniam comunem, de qua medietas erat primi, tertia secundi, sexta quoque pars tertii hominis, et cum eam in tutiori loco habere voluissent, ex ea unusquisque cepit fortuitu, et cum totam ad tutiorem locum adportassent, primus ex hoc quod cepit posuit in comune medietatem, secundus tertiam, tertius sextam, et cum ex hoc quod in comune positum fuit inter se equaliter divisissent, suam unusquisque habuit portionem; queritur quanta fuit illa pecunia, et quod unusquisque ex ea cepit. Hec itaque questio, domine serenissime Imperator, in palatio vestro Pisis coram vestra Maiestate a magistro Johanne panormitano mihi fuit proposita. Super cuius questionis solutionem cogitans, tres modos in solvendo ipsam inveni, quos in libro nostro, quem de numero conposui, patenter inserui. Sed cum super solutionem eiusdem questionis intenderem, alium nimis pulchrum modum inveni, quem Serenitati vestre pandere, de vestra benignitate confisus, curavi. Sed antequam ad eius solutionem veniam, quedam introductoria vestre Maiestati proponere dignum duxi. Videlicet cum de aliqua re medietas tollitur, illa medietas equa-

Digitized by Google

lis est relique medietati que remanet; similiter si de aliqua re tertia tollitur pars, ipsa tertia reliquarum duarum tertiarum, que remanent, existit medietas; rursus cum de aliqua re tollitur sexta pars, illa sexta pars reliquarum quinque sextarum quinta pars est. His itaque denotatis, pro qualibet tertia parte quantitatis, ab ipsis tribus hominibus posite in comuni, posui rem. Et quia proponitur unusquisque, habita ipsa re, suam habuisse portionem, ex necessario sequitur, post illud quod ipsi tres posuerunt in comuni, primo remansisse totius comunis pecunie medietatem minus ipsa re. Secundo tertiam minus eadem re. Tertio homini sextam eiusdem pecunie partem, eadem re diminuta. Et quia primus posuit in comune medietatem ex toto eo quod ceperat, et illa medietas fuit equalis residuo quod ei remansit, si duplicabitur ipsius residuum, scilicet medietas dicte pecunie minus re, habebitur pro toto eo, quod ipse
fol. 7 recto primus homo cepit, tota | pecunia semel minus duabus rebus. Item quia secundus homo posuit in comune tertiam partem ex hoc quod ceperit, et illa tertia pars fuit medietas eius quod ei remansit, scilicet de tertia parte totius pecunie minus re, si super ipsam tertiam partem dicte pecunie minus re addatur medietas eorum, scilicet sexta pars eiusdem pecunie minus medietate rei, egredietur pro toto hoc, quod cepit secundus homo, medietas totius pecunie, re una et dimidia diminuta. Adhuc quia tertius homo ex hoc quod cepit posuit in comune sextam partem minus re, addatur quinta pars eorum, scilicet XXX.ª pars pecunie minus quinta parte rei, habebitur pro hoc, quod cepit tertius homo, quinta pars dicte pecunie, re una et quinta rei diminuta. Quare si addatur tota pecunia minus duabus re-

Digitized by Google

bus, quam cepit primus, cum medietate eiusdem pecunie minus una re et dimidia, quam cepit secundus, et cum quinta parte eiusdem pecunie minus una re et quinta unius rei, quam cepit tertius, habebitur pro tota eorum pecunia semel eadem pecunia et septem decime eiusdem pecunie minus IIII.or rebus et septem decimis unius rei. Quare patet, quod septem X.e totius pecunie equantur quatuor rebus et septem decimis rei. Et quia sicut est una quantitas ad aliam, ita quodlibet multiplex unius ad idem multiplex alterius, erit ergo decuplum septem decimarum eiusdem pecunie, scilicet septuplum eiusdem pecunie, equale ~~d~~aplo quatuor rerum et septem decimarum, scilicet rebus XLVII; unde si ponatur rem esse VII, tota pecunia erit XLVII, quia septuplum ipsius pecunie, scilicet de XLVII, equabitur XLVII rebus, scilicet multiplicationi de XLVII in VII. Nam septies XLVII sunt quantum XLVII vicibus VII. Quia primus cepit totam pecuniam minus duabus rebus, si de tota pecunia, que est XLVII, auferantur 2 res, scilicet XIIII, remanebunt XXX3 pro eo quod cepit primus homo. Item quia secundus cepit medietatem eiusdem pecunie minus una re et dimidia, si de medietate pecunie que est XXXIII $\frac{1}{2}$ auferatur res una et dimidia, scilicet X $\frac{1}{2}$, remanebunt XIII pro eo quod cepit secundus homo. Rursus quia tertius homo cepit quintam partem dicte pecunie minus re una et quinta, si de quinta parte totius pecunie que est $\frac{3}{5}$ 9 auferatur res et quinta pars rei, scilicet $\frac{3}{5}$ 8, remanebit 1 pro eo quod cepit tertius homo. Additis ergo 33 que | cepit primus homo cum 13 que cepit secundus et cum fol. 7 verso
1 quod cepit tertius, erunt 47, ut pro tota pecunia inventum fuit. Verbi gratia de 33, que cepit, primus posuit in comu-

Digitized by Google

ne medietatem, scilicet $\frac{1}{2}$ 16, et remanserunt ei alia $\frac{1}{2}$ 16. Secundus vero homo de suis 13 que cepit posuit in comune tertiam partem, scilicet $\frac{1}{3}$ 4, et remanserunt ei $\frac{2}{3}$ 8. Tertius namque homo de uno quod cepit posuit in comune sextam partem, scilicet $\frac{1}{6}$ unius, et remanserunt ei $\frac{5}{6}$ unius. Additis ergo $\frac{1}{2}$ 16, que posuit primus homo in comuni, et $\frac{1}{3}$ 4 que posuit secundus, et $\frac{1}{6}$ unius quam posuit tertius, egredientur pro tota summa 21, quorum tertia pars, que est 7, si addantur cum $\frac{1}{2}$ 16, que remanserunt primo, et cum $\frac{2}{3}$ 8, que remanserunt secundo, et cum $\frac{5}{6}$ unius, que remanserunt tertio, habebit primus homo medietatem totius pecunie, scilicet $\frac{1}{2}$ 23, et tertius homo habebit sextam partem eiusdem pecunie, scilicet $\frac{5}{6}$ 7. Et sic secundum hunc modum solutiones similium questionum de facile haberi possunt.

De quinque numeris reperiendis ex proportionibus datis.

Solvam etiam per consimilem modum utramque questionem, quas per Robertinum aggiu (sic) domicellum vestrum vestre Maiestati transmisi, quarum prima fuit de quinque numeris, ex quibus primus cum medietate secundi et tertii et quarti facit quantum secundus cum tertia parte tertii et quarti numeri, nec non et quantum quartus cum quinta parte quinti et primi et secundi et tertii numeri. Ad hoc itaque inveniendum, posui pro primo numero causam, et pro quinto rem, et pro numero, in quo subscriptis conditionibus sibi invicem equantur numeri predicti, fortuitu posui 17, et quia primus numerus, quem causam esse posui, cum medietate secundi et tertii et quarti numeri

Digitized by Google

surgit in 17, oportet ut inter secundum et tertium et quartum numerum esse duplum de 17 minus causa, scilicet 34 minus duabus causis, quia medietas de 34 minus duabus causis est 17 minus causa, que si addantur cause, scilicet primo numero, faciunt 17; deinde super 34 minus duabus causis, que sunt summa secundi et tertii et quarti numeri, addidi rem, scilicet quintum numerum, et fuerunt in summa 34 et res minus duabus causis, de quibus extraxi dragmas 17, scilicet quantitatem secundi numeri, et tertie partis tertii et quarti et quinti numeri, remanserunt pro duabus tertiis tertii et quarti et quinti numeri dragme 17, et res una minus duabus causis; et quia cum de aliqua quantitate aufertur tertia pars, illa tertia pars | est *fol. 8 recto* medietas residui, quare super 17 et rem minus duabus causis, addidi medietatem eorum, scilicet $\frac{1}{2}$ 8, et medietatem rei minus una causa, et fuit totum illud quod concretum est $\frac{1}{2}$ 25 et res una et dimidia minus tribus causis, et hec est summa tertii et quarti et quinti numeri, quam extraxisti ex summa secundi et tertii et quarti et quinti numeri, scilicet de dragmis 34 et re una minus duabus causis; et fuit illud quod remansit pro quantitate secundi numeri dragme $\frac{1}{2}$ 8 et causa una minus medietate rei. Deinde cum summa tertii et quarti et quinti numeri, scilicet cum dragmis $\frac{1}{2}$ 25 et re una et dimidia minus tribus causis, addidi primum numerum, scilicet causam et habui dragmas $\frac{1}{2}$ 25, et rem unam et dim idiam minus duabus causis pro quantitate tertii et quarti et quinti et primi numeri, de qua quantitate extraxi dramgas 17, scilicet tertium numerum, et quartam partem quarti et quinti et primi numeri, et remanserunt pro tribus quartis quarti

Digitized by Google

et quinti et primi numeri dragme $\frac{1}{2}$ 8 et res una et dimidia minus duabus causis, et quia cum de aliqua quantitate tollitur quarta pars, illud quod tollitur est tertia pars ex eo quod remanet, quare super $\frac{1}{2}$ 8 et re una et dimidia minus duabus causis addidi tertiam partem eorum, et sic habuit pro summa quarti et quinti et primi numeri dragmas $\frac{1}{2}$ 11 et duas res minus causis $\frac{2}{3}$ 2, quam summam extraxi de summa tertii et quarti et quinti et primi numeri, scilicet de $\frac{1}{2}$ 25 et re una et dimidia minus duabus causis, et remanserunt pro quantitate tertii numeri dragme $\frac{1}{2}$ 14 et due tertie unius cause minus medietate unius rei. Deinde ex summa quarti et quinti et primi numeri, scilicet de dragmis $\frac{1}{2}$ 11 et duabus rebus minus causis $\frac{2}{3}$ 27 lei extraxi quintum et primum numerum, scilicet unam rem et lunar causam, et remanserunt pro quantitate quarti numeri dragme $\frac{1}{2}$ 11 et res una minus causis $\frac{2}{3}$ 3. Et quia quartus numerus cum quinta parte quinti et primi et secundi numeri facit dragmas 17, aggregavi quintum et primum et secundum numerum, scilicet rem et causam et dragmas $\frac{1}{2}$ 8 et causam unam minus medietate unius rei, et sic pro summa quinti et primi et secundi numeri habui dragmas $\frac{1}{2}$ 8 et duas causas et medietatem rei, de quibus omnibus accepi quintam partem, scilicet dragmas $\frac{7}{10}$ 1 et $\frac{2}{3}$ unius cause et decimam partem unius rei, et aggregavi hoc super quantitatem quarti numeri, scilicet $\frac{1}{2}$ 11 et re una minus causis $\frac{2}{3}$ 3, et fuit hoc totum dragme $\frac{1}{30}$ 13 et res una et decima minus causis $\frac{4}{15}$ 3, que equantur
fol. 8 verso dragmis 17. | Et quia cum equalibus equalia adduntur omnia fiunt equalia, si utrique parti addantur cause $\frac{4}{15}$ 3, erunt dragme $\frac{17}{30}$ 13 et $\frac{11}{10}$ unius rei equales causis $\frac{4}{15}$ 3,

Digitized by Google

et dragmis 17; et quia cum ab equalibus equalia auferuntur que remanent sunt equalia, si ab utraque parte auferuntur dragme $\frac{1}{30}$ 13, remanebunt $\frac{11}{10}$ minus rq equales causis $\frac{4}{15}$ 3 et dragmis 4 minus XXX^a unius dragme. Quare ut reducerem hoc in equalitatem unius rei tantum, multiplicavi causas $\frac{4}{15}$ 3, dragmas 4 minus XXX^a per 10, et divisi utramque multiplicationem per 11, et inveni quod res una equatur causis 3 minus XXX^a tertia parte unius cause et dragmis $\frac{20}{33}$. Servavi hoc, et addidi primum numerum cum secundo et tertio, scilicet causam unam cum dragmis $\frac{1}{2}$ 8, et causa una minus medietate rei, et cum dragmis $\frac{1}{6}$ 14 et duabus tertiis unius cause minus medietate unius rei, et habui dragmas $\frac{1}{3}$ 22 et causas $\frac{2}{3}$ 2 et minus una re, de quibus omnibus accepi sextam partem, et addidi eam super quintum numerum, scilicet super rem, et fuit totum illud quod inde aggregatum est $\frac{5}{6}$ unius rei et $\frac{4}{9}$ unius cause et dragme $\frac{7}{9}$ 3, que equantur dragmis 17; quare ab utraque parte extraxi dragmas $\frac{7}{9}$ 3, et remanserunt $\frac{5}{6}$ unius rei et $\frac{4}{9}$ unius cause, que equantur dragmis $\frac{2}{9}$ 13, que ut reducerem ad equalitatem unius rei multiplicavi per 6 $\frac{4}{9}$ unius cause et dragmas $\frac{2}{9}$ 13 per 6, et quod ex utraque multiplicatione provenit divisi per 5, et habui quod res una et $\frac{8}{15}$ unius cause equantur dragmis $\frac{13}{15}$ 15. Superius enim inveni quod res una equatur tribus causis minus XXX^a tertia parte unius cause et dragmis $\frac{70}{33}$ 3, quare cause 3 minus $\frac{1}{33}$ et $\frac{8}{15}$ unius cause et dragme $\frac{20}{33}$ 3 equantur dragmis $\frac{13}{15}$ 15. Nam cause 3 minus $\frac{1}{33}$ unius cause et $\frac{8}{15}$ eiusdem cause sunt in summa cause $\frac{83}{165}$ 3, ergo cause $\frac{83}{165}$ 3 et dragme $\frac{20}{33}$ 3 ~~sunt~~ dragme $\frac{13}{15}$ 15, unde si comuniter auferantur dragme $\frac{20}{33}$ 3,

Digitized by Google

remanebunt cause $\frac{63}{165}$ 3 equales dragmis $\frac{63}{165}$ 12, unde hec omnia multiplicavi per 165, et habui quod cause 378 equantur dragmis 2023, quare divisi 2023 per 578, et provenient pro quantitate unius cause, scilicet pro quantitate primi numeri, $\frac{1}{3}$ 3. Quem numerum, ut reducerem in integrum, duplicavi omnes numeros suprascriptos, et habui pro primo numero 7, pro secundo 17 et unam causam minus medietate unius rei, et pro tertio $\frac{1}{3}$ 28 et duas tertias unius cause minus medietate unius rei, et pro quarto numero habui $\frac{2}{3}$ 22 et rem unam minus causis $\frac{7}{3}$ 3, et pro quinto numero habui tantum rem. Et quia inveni
fol. 9 recto rem equalem tribus esse causis minus | una XXX^a tertia et dragmis $\frac{20}{33}$, duplicavi iterum has dragmas, et provenerunt dragme $\frac{7}{33}$ 7, et sic res una equatur tribus causis minus $\frac{1}{33}$ unius cause et dragmis $\frac{7}{33}$ 7. Quare multiplicavi causas 3 minus $\frac{1}{33}$ unius cause per numerum unius cause, scilicet per 7, et addidi illud quod provenit cum dragmis $\frac{7}{33}$ 7, et habui 28 pro quantitate rei, hoc est pro quantitate quinti numeri. Deinde quia secundus numerus est 17 et causa una minus medietate rei, addidi 17 cum causa una, et fuerunt 24, de quibus extraxi medietatem rei, scilicet 14, remanserunt 10 pro secundo numero. Rursus quia tertius numerus est $\frac{1}{3}$ 28 et $\frac{2}{3}$ unius cause minus medietate rei, addidi duas tertias unius cause, scilicet de 7 cum $\frac{1}{3}$ 28, et habui 33, de quibus eieci medietatem rei, scilicet 14, remanserunt pro tertio numero 19. Item quia quartus numerus est $\frac{2}{3}$ 22 et res una minus tribus causis et $\frac{2}{3}$ unius cause, addidi rem, scilicet 28, cum $\frac{2}{3}$ 22, et provenerunt $\frac{2}{3}$ 50, de quibus eieci causas $\frac{2}{3}$ 3, scilicet $\frac{2}{3}$ 25, remanserunt pro quarto numero 25. Et sic, ut vestre se-

Digitized by Google

renissime maiestati transmisi, primus numerus est 7, secundus 10, tertius 19, quartus 25, quintus 28, et numerus in quo equantur ipsi numeri est 34.

De quatuor hominibus et bursa ab eis reperta, questio notabilis.

Secunda vero questio fuit de quatuor hominibus bizantios habentibus, qui bursam bizantiorum invenerunt, ex quibus primus cum bursa excedit secundum et tertium hominem in duplico (sic). Secundus tertium et quartum in triplo. Tertius quartum et primum in quadruplo. Quartus vero homo cum bursa excedit primum et secundum in quincuplo. Hanc quidem questionem insolubilem esse monstrabo, nisi concedatur primum habere debitum; ad quod demonstrandum ponam pro bizantiis primi hominis dragmam, qua addita cum bursa egredietur dragma una et bursa una, que sunt duplum bizantiorum secundi et tertii hominis, quare inter secundum et tertium hominem habetur equale medietatis burse et unius dragme, de qua medietate ponam secundum hominem habere rem, remanet ergo pro bizantiis tertii hominis medietas burse et unius dragme minus una re, deinde addam bursam cum quantitate secundi hominis, et erit illud quod aggregabitur bursa una et res una, quorum tertia pars est equalis quantitati bizantiorum tertii et quarti hominis. Ergo inter tertium et quartum hominem habent tertiam burse et unius rei, de qua tertia si auferatur quantitas bizantiorum tertii hominis, scilicet medietas burse et unius dragme minus re una, remanebunt pro quantitate bizantiorum quarti

Digitized by Google

hominis quatuor tertie unius rei minus sexta unius burse et medietate unius dragme, super que addam dragmam, scilicet quantitatem primi hominis, et habebunt inter quartum et primum hominem quatuor tertias unius rei
fol. 9 verso et medietatem dragme | minus sexta parte unius burse, quod totum quadruplicabo, et provenient quinque res et tertia et dragme 2 et minus $\frac{2}{3}$ unius burse, que equantur coniuncto quantitatis tertii hominis et burse. Nam tertius homo habet, ut superius inventum est, medietatem burse et unius dragme, re una diminuta, quibus si addatur bursa, erit bursa una et dimidia et medietas dragme minus una re, que equantur rebus $\frac{1}{3}$ 5 et dragmis 2 minus $\frac{2}{3}$ unius burse. Quare si comuniter addantur $\frac{2}{3}$ unius burse et res una, erunt burse $\frac{1}{6}$ 2 et medietas dragme, que equantur rebus $\frac{1}{3}$ 6 et dragmis 2. Quare si comuniter auferatur medietas dragme, remanebunt $\frac{13}{6}$ unius burse, que equantur rebus $\frac{1}{3}$ 6, et dragme $\frac{1}{2}$ 1. Quare, ut redigantur hec ad quantitatem unius burse, multiplicabo res $\frac{1}{3}$ 6 et dragmam $\frac{1}{2}$ 1 per 6, et egredientur 38 res et dragme 9 dividende per 13, exibunt res 3 minus $\frac{1}{13}$ et $\frac{9}{13}$ unius dragme, que equantur uni burse, servabo hec et addam bursam cum quantitate quarti hominis, scilicet cum $\frac{4}{3}$ unius rei minus $\frac{1}{6}$ unius burse et medietate unius dragme, et habebo $\frac{4}{3}$ unius rei et $\frac{5}{6}$ unius burse minus medietate unius dragme, que equantur quincuplo quantitatis primi et secundi hominis, qui habent dragmam $\frac{1}{4}$ rem, ex quorum quincuplo proveniunt quinque res et quinque dragme, ergo $\frac{4}{3}$ unius rei et $\frac{5}{6}$ unius burse minus medietate unius dragme equantur quinque rebus et quinque dragmis. Quare si comuniter addatur medietas

Digitized by Google

dragme, erunt $\frac{4}{3}$ unius rei et $\frac{5}{6}$ unius burse equales quinque rebus et dragmis $\frac{1}{2}$ 5. Quare si comuniter auferatur $\frac{4}{3}$ unius rei remanebunt res $\frac{2}{3}$ 3 et dragme $\frac{1}{2}$ 5, que equantur $\frac{5}{6}$ unius burse, quare, ut redigam hec ad bursam unam, multiplicabo res $\frac{2}{3}$ 3 et dragmas $\frac{1}{2}$ 5 per 6, et egredientur res 22 et dragme 33, quas dividam per 5 et venient res $\frac{2}{5}$ 6, que equantur burse. Invenctum est superius quod tres res minus $\frac{1}{13}$ unius rei et $\frac{9}{13}$ unius dragme equari (sic) uni burse, ergo res $\frac{2}{5}$ 4 et dragme $\frac{3}{5}$ 6 equantur tribus rebus minus $\frac{1}{13}$ unius rei et $\frac{9}{13}$ unius dragme, quod est impossibile, quia res $\frac{2}{5}$ 4 sunt plures rebus $\frac{12}{13}$ 2, et dragme $\frac{3}{5}$ 6 sunt plures de $\frac{9}{13}$ unius dragme. Unde si concedatur primum hominem habere debitum, invenietur secundum hanc investigationem quod res $\frac{2}{5}$ 4 minus dragmis $\frac{3}{5}$ 6 equantur rebus $\frac{12}{13}$ 2 minus $\frac{9}{13}$ unius dragme, unde si comuniter auferantur $\frac{9}{13}$ unius dragme, remanebunt res $\frac{12}{13}$ 2, que equantur rebus $\frac{2}{5}$ 4 minus dragmis $\frac{39}{65}$ 5. Quare si comuniter addantur dragme $\frac{39}{65}$ 5, remanebunt res $\frac{2}{5}$ 4 que equantur rebus $\frac{12}{13}$ 2 et dragmis | $\frac{39}{65}$ 5. Quare si comuniter auferantur res $\frac{12}{13}$ 2 remanebunt res $\frac{34}{65}$ 1, que equantur dragmis $\frac{39}{65}$ 5. Et, ut hec habeantur in integris numeris, multiplicabo utrumque numerum per 65, et egredientur res 96, que equantur dragmis 384. Ergo proportio rerum ad dragmas est sicut 96 ad 384, que proportio in minoribus numeris est sicut 1 ad 4, ergo res una equatur quatuor dragmis, unde si ponam rem esse 4, scilicet quantitatem secundi hominis, erit dabitum primi biz. 1. Et quia invenimus superius quod bursa equatur rebus $\frac{2}{5}$ 4 minus dragmis $\frac{3}{5}$ 6, si de rebus $\frac{2}{5}$ 4, que sunt biz. $\frac{3}{5}$ 17, auferantur dragme $\frac{3}{5}$ 6, hoc est biz. $\frac{3}{5}$ 6, remanebunt 11

fol. 10 recto

Digitized by Google

pro bizantiis burse, et quia tertius homo habet medietatem burse minus medietate dragme et re una, si de medietate burse, scilicet de $\frac{1}{2}$ 5, auferatur res una et medietas dragme, scilicet $\frac{1}{2}$ 4, remanebit biz. 1 pro quantitate tertii hominis. Rursus quartus homo habet $\frac{1}{3}$ unius rei et medietatem unius dragme minus sexta parte unius burse, si de $\frac{1}{3}$ unius rei et de medietate unius dragme, scilicet de $\frac{1}{2}$ 5, auferatur sexta unius burse, scilicet biz. $\frac{5}{6}$ 1, remanebunt 4 pro biz. quarti hominis.

De eadem re.

Super similes quidem quatuor hominum questiones, in quibus multiplicia que habent cum bursa ponuntur ex ordine super quantitatem, quam habent super duos homines sibi invicem sequentes, inveni hanc generalem, videlicet ut pro radice quantitatis secundi hominis habentur 2, et pro radice burse habeatur 1, deinde numerus multiplicitatis primi et burse quam habent ~~later~~ secundum et tertium hominem, addatur super radicem secundi hominis, et habebitur quantitas eius, et quartus homo habebit totidem, et tertius homo habebit semper 1, et debitum primi erit 1 semper; deinde quot unitates sunt in multiplicitate predicta, tot numeros pares, a quaternario incipiendo, addantur simul ex ordine, et quot inde provenient addatur super radicem burse, scilicet super 1, et habebitur quantitas burse. Verbi gratia habeat primus cum bursa quadruplum secundi et tertii. Secundus vero habeat quincuplum tertii et quarti. Tertius namque sexuplum habeat quarti et primi. Quartus quoque habeat cum bursa septuplum primi et secundi.

Digitized by Google

Quia numerus multiplicitatis, quam habet primus cum bursa super secumdum et tertium hominem, est 4, addam 4 super radicem secundi hominis, scilicet super 2, et egredientur 6 pro quantitate quam habet unusquisque secundi et quarti hominis, deinde pro eodem quadruplo colligam IIII.^{or} ~~minores~~ pares secundum quod sunt in ordine numerorum, incipiendo ab 4, videlicet 4 et 6 et 8 et 10, et erunt 28, quos addam super radicem burse, scilicet super 1, et egredientur 29 pro bizantiis burse. Et sic procedendum est in omnibus quatuor hominum questionibus.

Item de modo predicto extraxi hanc regulam super inventionem trium numerorum, quorum primus cum tertia parte reliquorum numerorum surgat in 14. Secundus vero cum quarta parte reliquorum surgat in 17. Tertius namque cum $\frac{1}{5}$ primi et secundi numeri surgat in 19. Pateat quidem Serenitati vestre hanc questionem a me solutam esse in tertio decimo capitulo libri mei dupliciter, sed quia huius solutionis inventio placet mihi pre ceteris modis, volui eam vestre pandere Maiestati. Posui primum in ordine $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$, et extraxi unumquodque ipsorum de uno integro, remanserunt $\frac{2}{3}$ sub $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4}$ sub $\frac{1}{4}$ et $\frac{4}{5}$ sub $\frac{1}{5}$, post hoc de 14 et 17 et de 19 extraxi 14 remansit 0 super 14 et 3 super 17 et 5 super 19, ut in questione cernitur. Deinde incepi ad $\frac{2}{3}$, et multiplicavi 2 per 3, et quod provenit divisi per multiplicationem de 3 in 2, et provenit 1, quod posui sub $\frac{2}{3}$, et multiplicavi iterum eadem 2 per 4 que sunt sub virga de $\frac{3}{4}$, et summam divisi per 3 que sunt sub virga, et per 3 que sunt super 4, et provenerunt $\frac{8}{9}$ sub $\frac{3}{4}$. Rursus multiplicavi eadem 2 per 5 que sunt sub virga de $\frac{4}{5}$, et divisi summam per 3 que sunt sub virga

fol. 10 verso

Digitized by Google

de $\frac{2}{3}$, et per 2 que sunt super virga de $\frac{4}{3}$, et provenerunt $\frac{8}{9}$ sub $\frac{4}{3}$, deinde multiplicavi 3 que sunt sub virga de $\frac{2}{3}$ per 0, quod est super 14, et divisi per 2 et provenit 0 super ipsum 0 Item multiplicavi 4 que sunt sub virga de $\frac{3}{4}$, per 3 que sunt super 17, et divisi per 3 que sunt super 4, et provenerunt 4 super ipsis tribus. Adhuc multiplicavi 5 que sunt sub virga de $\frac{4}{5}$ per 5 que sunt super 19, et divisi per 4 que sunt super 5, et provenerunt $\frac{1}{6}$ 6, que servavi super 19, ut in figura cernitur (1). Post hoc collegi 1 et $\frac{8}{9}$ et $\frac{5}{6}$ in unum, et fuerunt $\frac{44}{18}$; similiter addidi $\frac{1}{6}$ 6 et 4 et 0 et fuerunt 10, que omnia divisi per 1 minus multitudine numerorum positorum, scilicet per 2, et provenerunt $\frac{43}{36}$ et $\frac{1}{6}$ 5. Addidi $\frac{1}{6}$ 5 cum 14 fuerunt $\frac{1}{6}$ 19, et extraxi unum integrum de $\frac{43}{36}$, remanserunt pro quantitate primi numeri $\frac{43}{36}$ cuiusdam summe, que summa est quantitas secundi et tertii numeri, cum quibus $\frac{43}{36}$ addidi tertiam eiusdem summe, scilicet $\frac{12}{36}$, fuerunt $\frac{25}{36}$. Quare multiplicavi $\frac{1}{6}$ 19 per 36, et divisi summam per 25, et provenerunt $\frac{37}{50}$ 27 pro quantitate secundi et tertii numeri. De quibus accepi tertiam partem que est $\frac{9}{50}$ 9, et extraxi ipsam de 14, remanserunt $\frac{41}{50}$ 4 pro quantitate primi numeri, deinde accepi $\frac{8}{9}$ de $\frac{37}{50}$ 27 que
fol. 11 recto sunt $\frac{12}{25}$ 24, | et extraxi inde primum numerum, scilicet $\frac{41}{50}$ 4, remanserunt $\frac{33}{50}$ 19, de quibus abieci 4 pro ipsis 4 que sunt super 17, remanserunt $\frac{33}{50}$ 15 pro quantitate tertii numeri, que extraxi de $\frac{37}{50}$ 27, remanserunt $\frac{44}{50}$ 11 pro secundo numero. Ad demonstrandum siquidem qualiter talis inventio, sive regula, proveniat ex modo supra-

(1) Vedi Fig. 5.

Digitized by Google

scripto trium hominum, ponam secundum et tertium numerum esse rem, de qua abiecta tertia parte sui, cum qua primus numerus surgit in 14, remanebunt $\frac{2}{3}$ eiusdem rei; et quia, ut dictum est, cum de quacunque re tollitur $\frac{1}{3}$, illud quod tollitur est medietas eius quod remanet, unde si super $\frac{2}{3}$ rei addatur meditas eius, redibit res predicta; quod etiam habetur si multiplicentur $\frac{2}{3}$ dicte rei per 3, et quod provenerit dividatur per 2, et est illud idem quando multiplicavi superius 3 per 2, et divisi per 2 vicibus 3, et habui tunc rem positam pro secundo et tertio numero, pro qua posui 1 sub $\frac{2}{3}$, de qua re accepi tertiam partem, et abieci de 14, remanserunt 14 minus tertia rei pro quantitate primi numeri, quibus additis cum secundo numero et tertio, scilicet cum re una, erit tota summa ipsorum trium numerorum nihil amplius de 14 et de $\frac{2}{3}$ unius rei, et propter hoc posui 0 super 14, et $\frac{2}{3}$ sub $\frac{1}{3}$, et quia secundus numerus cum $\frac{1}{4}$ tertii et primi numeri surgit in 17, et extraxi 17 de summa ipsorum trium numerorum, scilicet de 14 et de $\frac{2}{3}$ unius rei, et remanserunt $\frac{3}{4}$ primi et secundi numeri et $\frac{2}{3}$ unius rei minus $\frac{9}{4}$, et ideo posui 3 super 17 et $\frac{9}{4}$ sub $\frac{1}{4}$; et quia cum de aliqua quantitate extrahitur quarta pars, illud quod tollitur est tertia pars residui, addidi super $\frac{2}{3}$ unius rei minus $\frac{2}{3}$ tertiam partem eorum, quod fit cum multiplicantur 2 que sunt super 3 per 4 que sunt sub virga de $\frac{3}{4}$, et dividitur per 3 que sunt sub virga de $\frac{2}{3}$, et per 3 que sunt super virga de $\frac{3}{4}$, et cum multiplicantur 4 que sunt sub virga de $\frac{3}{4}$ per 3 posita super 17, et summa dividitur per 3 que sunt super 4, quia cum super aliqua quantitate additur tertia pars et fit alia quantitas, erit proportio prime quantitatis ad

73
73
4
XX

Digitized by Google

secundam sicut 3 est ad 4, quare multiplicande sunt $\frac{2}{3}$ unius rei minus 3 per 4, et summa dividenda est per 3. Nam ex multiplicatione de 4 in $\frac{2}{3}$ unius rei minus 3 veniunt $\frac{8}{3}$ unius rei minus 12, quibus divisis per 3 veniunt $\frac{8}{9}$ unius rei minus 4; et ideo posui $\frac{8}{9}$ sub $\frac{3}{4}$, et 4 super 3 positis super 17. Rursus quia tertius numerus cum quinta parte primi et secundi numeri surgit in 19, si de $\frac{2}{3}$ unius rei, et de 14 auferantur 19, remanebunt pro $\frac{4}{3}$ primi et secundi numeri $\frac{2}{3}$ unius rei minus 5, et ideo super 19 posui 5, et sub posui $\frac{4}{3}$. Et quia cum de aliqua quantitate extrahitur quinta pars, illud quod extrahitur est quarta
fol. 11 verso pars residui, ideo super $\frac{2}{3}$ | unius rei minus 5 addenda est quarta pars eorum super ipsas, quod fit cum $\frac{2}{3}$ unius rei minus 5 multiplicantur per 5, et summa dividitur per 4, et sic habuimus $\frac{5}{6}$ rei minus $\frac{1}{4}$ 6 pro quantitate primi et secundi numeri, que $\frac{1}{4}$ 6 posite sunt superius super 19, et $\frac{5}{6}$ sub $\frac{4}{3}$, et sic ex hac inventione habui pro secundo et tertio numero rem, et pro tertio et primo habui $\frac{8}{9}$ unius rei minus 4, et pro primo et secundo numero $\frac{5}{6}$ minus $\frac{1}{4}$ 6, quibus omnibus (sic) in unum congregavi superius, et habui $\frac{49}{18}$ unius rei minus $\frac{1}{4}$ 10, quod fuit equale duplo summe ipsorum trium numerorum, cum in ipsa congregatione unusquisque ipsorum trium numerorum bis conputatus sit, et ideo mediavi prescripta $\frac{49}{18}$ unius rei minus $\frac{1}{4}$ 10, et habui $\frac{49}{36}$ unius rei minus $\frac{1}{8}$ 5 pro quantitate ipsorum trium numerorum, de quibus abieci integrum unum pro re una, remanserunt $\frac{13}{36}$ unius rei, que est quantitas secundi et tertii numeri minus $\frac{1}{8}$ 5 pro quantitate primi numeri. Super quod addidi tertiam partem rei, et habui $\frac{25}{36}$ unius rei minus $\frac{1}{8}$ 5, que equantur 14. Addidi ergo $\frac{1}{8}$ 5

Digitized by Google

super 14 et provenerunt $\frac{25}{36}$ unius rei, que equantur $\frac{1}{6}$ 19, quare multiplicavi 36 per $\frac{1}{6}$ 19, et summam divisi per 25, et habui $\frac{27}{50}$ 27 pro quantitate unius rei, scilicet pro summa secundi et tertii numeri, de qua summa accepi tertiam partem, et extraxi eam de 14, et quod remansit, scilicet $\frac{41}{50}$ 4, fuit quantitas primi numeri. Et quia quantitas primi et tertii numeri fuit $\frac{8}{5}$ unius rei minus 4, de $\frac{8}{5}$ rei minus 4, scilicet de $\frac{12}{25}$ 20, extracxi primum numerum, scilicet $\frac{41}{50}$ 4, remanserunt $\frac{33}{50}$ 15 pro quantitate tertii numeri, quem numerum extracxi de summa secundi et tertii numeri, scilicet de $\frac{27}{50}$ 27, remanserunt $\frac{44}{50}$ 11 pro quantitate secundi numeri.

De quatuor hominibus bizantios habentibus.

Posui hanc aliam questionem similem suprascripte questionis, sancte et venerande pater domine Ranerii dignissime Card., ut que in prescripta questione dicta sunt melius clementia vestra intendere valeat. Sunt enim quatuor homines bizantios habentes, ex quibus primus cum medietate bizantiorum reliquorum trium hominum habeat 33. Secundus cum tertia parte bizantiorum reliquorum trium hominum 35. Tertius quoque cum $\frac{1}{4}$ bizantiorum reliquorum habeat 36. Quartus vero cum $\frac{1}{5}$ bizantiorum primi et secundi et tertii hominis habeat 37; queritur quot unusquisque habuit. Posui quidem hos numeros studiose, ut solutio huius questionis cadat in integris numeris, et ostendam hanc insolubilem esse sub posita conditione. Ad quod demonstrandum ponam secundum et tertium et quartum hominem habere rem, cuius rei medietas si addatur super

Digitized by Google

bizantios primi, nimirum surgent in 33, ut propositum est. Quare patet manifeste primum hominem habere 33 minus medietate rei, que addita cum bizantiis secundi et tertii et quarti hominis, scilicet cum re, venient 33 et medietas rei pro tota summa bizantiorum quatuor hominum, de qua summa secundus cum $\frac{1}{3}$ bizantiorum reliquorum trium hominum proponitur habuisse 35. Quare si auferantur 35 de bizantiis 33 et de medietate rei, remanebit pro $\frac{2}{3}$ bizantiorum ipsorum, scilicet tertii et quarti et primi hominis, medietas rei minus biz. 2. Et quia cum de aliqua quantitate tollitur tertia pars, id quod tollitur est medietas eius quod remanet, si super medietate rei minus 2 addatur medietas eius, venient $\frac{3}{4}$ rei minus biz. 3 pro quantitate bizantiorum tertii et quarti et primi hominis. Ad que etiam veniemus si multiplicaverimus medietatem rei minus 2 per 3, et diviserimus per 2. Rursus quia proponitur tertium hominem cum $\frac{1}{4}$ bizantiorum quarti et secundi et primi hominis habere 36, si de tota summa, scilicet ex 33 et medietate rei, tollamus 36, remanebit pro $\frac{3}{4}$ bizantiorum quarti et primi et secundi hominis medietas rei minus biz. 3; et quia cum de aliqua quantitate tollitur $\frac{1}{4}$, illud quod tollitur est $\frac{1}{3}$ eius quod remanet, si super $\frac{1}{3}$ rei minus 3 addatur tertia eius, hoc est quod multiplicetur $\frac{1}{3}$ rei minus 3 per 4, et summa dividatur per 3, venient $\frac{1}{3}$ rei minus 4 pro quantitate bizantiorum eorumdem quarti et primi et secundi hominis. Item quia quartus homo cum $\frac{1}{5}$ bizantiorum primi et secundi et tertii hominis habet 37, si de tota summa eorum IIII^{or} hominum tollantur 37, remanebit pro $\frac{4}{5}$ bizantiorum primi et secundi et tertii hominis medietas rei minus biz. 4, quam si

Digitized by Google

multiplicaverimus per 5, que sunt sub virga de $\frac{1}{5}$, et que provenerint diviserimus per 4, que sunt super virga, habbimus $\frac{5}{4}$ rei minus biz. 5 pro quantitate bizantiorum primi et secundi et tertii hominis. Addamus ergo rem, quam habent inter secundum et tertium et quartum hominem, cum $\frac{3}{4}$ rei minus 3, que habent inter tertium et quartum et primum hominem, et cum $\frac{3}{4}$ rei minus 4, que habent inter quartum et primum et secundum hominem, et cum $\frac{5}{4}$ rei minus 5, que habent inter primum et secundum et tertium hominem, venient res $\frac{1}{24}$ 3 minus biz. 12, pro triplo bizantiorum IIII.^{or} hominum, cum in prescriptis partibus unusquisque ter conputatus sit. Quare si diviserimus res $\frac{1}{24}$ 3 minus biz. 12 per 3, habebimus rem $\frac{1}{72}$ 1 minus biz. 4 pro quantitate bizantiorum IIII.^{or} hominum, de qua summa si auferatur res, quam habent inter secundum et tertium et quartum hominem, remanebit $\frac{1}{72}$ rei minus 4 pro quantitate bizantiorum primi hominis, super quam si addiderimus medietatem rei, scilicet $\frac{1}{2}$ bizantiorum secundi et tertii et quarti hominis, erunt $\frac{37}{72}$ minus biz. 4, que equantur biz. 33. Comuniter si addiderimus biz. 4, erunt $\frac{37}{72}$ rei equales de biz. 37; unde ut veniamus ad notitiam unius rei, multiplicanda sunt 72 per biz. 37, et summa dividenda est per 37 que sunt super virga, | vel divi- fol. 12 verso
dantur biz. 37 per 37, et 1 quod provenit ex divisione ducatur in 72, et venient biz. 72 pro quantitate rei, et tot habent inter secundum et tertium et quartum hominem. Et quia proponitur primum hominem cum medietate bizantiorum secundi et tertii et quarti hominis habere 33, et predictorum 72 bizantiorum medietas est plus de 33, colligitur inde hanc questionem insolubilem esse, cum non

Digitized by Google

possit dici, quatuor homines habent biz., cum primus non habeat aliquod, immo habet debitum. Quare si voluerimus concedere ipsum habere debitum, erit questio solubilis, et erit debitum ipsius 3, scilicet differentia que est a 33 usque in 36; predictum quidem debitum si extrahatur ex bizantiis secundi et tertii et quarti hominis, remanebunt 69 pro summa bizantiorum IIII.^{or} hominum, ex quibus si extrahatur $\frac{3}{4}$ rei minus biz. 3, scilicet biz. 51, remanebunt biz. secundi hominis 18. Item extractis $\frac{3}{3}$ rei minus biz. 4, que habent inter quartum et primum et secundum hominem, hoc est biz. 44 de 69, remanent 25 pro bizantiis tertii hominis, quibus additis cum biz. secundi hominis, scilicet cum 18, erunt 43, quibus extractis ex bizantiis secundi et tertii et quarti hominis, scilicet de bizantiis 72, remanebunt pro bibizantiis quarti hominis 29. Vel aliter, de 69 predictis extrahantur $\frac{5}{4}$ rei minus biz. 5, que habent inter primum et secundum et tertium hominem, remanebunt similiter quarto homini 29. Et si dicemus primum hominem habere cum sua petitione 181, secundum 183, tertium 184, quartum 185, inveniemus, suprascriptis dispositis, primum hominem habere 1, secundum 94, tertium 105, quartum 141.

De quatuor hominibus qui invenerunt bizantios.

Quatuor homines invenerunt bizatios aliquot, de quibus unusquisque sumpsit aliquam quantitatem fortuitu, et cum vellent ipsos bizantios inter se equaliter dividere, primus duplicavit secundo bizantios quos ceperat, post hoc secundus triplicavit tertio homini totum id quod sumpserat. Quo facto tertius homo quadruplicavit quarto homini

Digitized by Google

bizantios suos, et quartus post hoc quincuplicavit primo homini bizantios quos ei remanserunt post duplicationem quam fecerat secundo homini, et sic unusquisque de inventis bizantiis suam habuit portionem, scilicet quartam partem; queritur que fuit summa inventorum bizantiorum, et quot ex ipsis unusquisque cepit. Ponam secundum hominem habuisse rem, quam cum ei duplicasset primus homo, habuit duas res, et primo homini remansit quinta pars quarte partis totius summe, cum ex quincuplo eius quod ei remanserat habuit quartam partem summe; unde si de quarta parte summe auferatur $\frac{1}{20}$ eiusdem, remanebunt $\frac{4}{20}$, hoc est $\frac{1}{5}$, pro eo quod quartus dedit primo homini, que quinta si addatur super $\frac{1}{4}$ summe, que remansit quarto homini post dationem quam fecit primo, erunt $\frac{9}{20}$ totius summe, et tantum habuit quartus homo, cum quadruplicatione sibi facta a tertio homine. Quare quarta pars de $\frac{9}{20}$, scilicet $\frac{9}{80}$, totius summe fuit illud quod cepit quartus homo, | et triplum eius, quod est $\frac{27}{80}$, est illud quod fol. 13 recto
accepit a tertio homine, quibus $\frac{27}{80}$ additis cum quarta parte, scilicet cum $\frac{20}{80}$ totius summe, faciunt $\frac{47}{80}$ eiusdem summe, et tantum habuit tertius homo, cum triplicatione sibi facta a secundo homine. Quare tertia pars, scilicet $\frac{47}{240}$ totius summe, fuit illud quod cepit tertius homo, et duplum de $\frac{47}{240}$, hoc est $\frac{94}{240}$, acceperat a secundo homine, quibus $\frac{94}{240}$ additis cum quarta parte summe, que remanserat secundo homini, reddunt $\frac{154}{240}$ pro eo quod habuit secundus homo cum duplicatione facta sibi a primo homine, que equantur duabus rebus. Quare medietas eorum, scilicet $\frac{47}{240}$ totius summe, est illud quod cepit secundus homo, et alia $\frac{27}{240}$ habuerat de primo, quibus $\frac{27}{240}$ additis cum $\frac{1}{20}$

Digitized by Google

summe, que remanserat primo homini post duplicationem, quam fecerat secundo, erunt $\frac{89}{240}$ pro eo quod cepit primus homo; unde si summam ponimus esse 240, erit illud quod sumpsit primus 89, et illud quod cepit secundus 77, et illud quod cepit tertius 47, et illud quod cepit quartus 27, scilicet $\frac{9}{80}$ de bizantiis 240. Et si dictum fuerit, quod primus homo de hoc quod cepit duplicavit omnes quantitates aliorum trium, et secundus post ipsa ducatione triplicavit omnia que habeant reliqui tres, et post ipsam triplicationem tertius quadruplicavit ea que habeant reliqui tres homines, et ad extremum quartus homo quincuplavit omnes quantitates quas habeant reliqui tres, et sic habuit unusquisque quartam partem totius summe. Ponam rem esse residuum quod remansit primo homini post duplicationem quam fecit reliquis, et triplicabo illam rem pro triplicatione quas sibi fecit secundus homo, et erunt res tres, quas quadruplicabo pro quadruplicatione quam fecit ei tertius homo, venient res 12 quibus et multiplicatis per 5, pro quincuplatione quam fecit quartus homo, erunt res 60, que sunt quarta totius summe, cum proponatur unumquemque habuisse, post predictas multiplicitates, quartam partem; quare multiplicabo 60 res per 4, et habebo res 240 pro summa bizantiorum IIII^er^ hominum. Deinde ponam ad libitum rem esse biz. 2, et erit tota summa 480, de quibus extraham biz. 2 prescriptos, remanebunt biz. 478, que sunt duplum bizantiorum secundi et tertii et quarti hominis, et medietatem eorum habuerunt ex duplicatione quam fecerat ei primus homo. Quare si medietatem de 478, que est 239, addamus
7 i super biz. 2, quę remanserunt primo homini, habebo 241

Digitized by Google

pro quantitate bizantiorum primi hominis; de inde ponam rem pro quantitate, que remansit secundo homini post triplicationem quam fecit reliquis tribus, et quadruplicabo ipsam rem, et illud quadruplum quincuplabo, | et habebo fol. 13 verso
20 res pro quarta parte totius summe. Ergo 20 res equantur biz. 120, unde si dividantur 120 per 20, venient biz. 6 pro quantitate rei, quibus biz. 6 extractis de 480, remanent 474 pro triplo bizantiorum tertii et quarti et primi hominis. Quare tertia pars erat quantitas bizantiorum ipsorum, et due tertie de 474, scilicet 316, fuerunt id quod acceperat a secundo homine, quibus biz. 316 additis cum biz. 6, qui remanserunt ipsi secundo, erunt biz. 322, et tot habuit secundus homo post duplicatione sibi facta a primo homine; ergo medietas de 322, que est 161, fuit quantitas bizantiorum secundi hominis. Rursus ponam rem pro eo quod remansit tertio homini post quadruplicationem quam fecerat aliis, et quincuplabo ipsam rem, et erunt quinque res equales quarti summe, scilicet de 120; quare res erit biz. 24, quibus extractis de 480, remanent 456 pro quadruplo bizantiorum quarti et primi et secundi hominis, ex quibus habuerunt tres quartas, scilicet 342, a tertio homine, quibus biz. 342 additis cum biz. 24 predictis, erunt biz. 366, et tot habuit tertius homo post duplicationem et triplicationem sibi factas a primo et a secundo homine, de quibus si accepero medietatem tertie partis, scilicet sextam, venient biz. 61 pro quantitate tertii hominis. Extractis ergo biz. 241 primi hominis, et 161 secundi, et 61 tertii de tota summa, remanebunt 17 pro biz. quarti hominis.

Aliter, quia omne duplicatum ex suo duplicante existit medietas, et triplicatum ex triplicante est tertia, et quadru-

Digitized by Google

plicatum ex quadruplicante sit quarta, et quincuplatum ex suo quincuplante quintam obtinet partem; ponam in ordine $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$, ut in margine cernitur, et multiplicabo 2 per 3 vicibus 4, vicibus 5, que sunt sub virgis, erunt 120, que sunt quantitas quarte partis omnium bizantiorum inventorum, quibus multiplicatis per 4, reddunt 480 pro tota summa; deinde tollam 1 quod est super 2 de 2, et 1 quod remanet ducam in 3 vicibus 4, vicibus 5, erunt 60, quibus etiam ductis in numerum hominum, scilicet in 4, erunt 240, quibus si addatur 1, quod provenit ex ducto 1 quod est super 2, in 1 quod est super 3, quod in 1 quod est super 4, quod in 1 quod est super 5, erunt 241, que sunt quantitas bizantiorum primi. Rursus extraham 1 quod est super 3 de 3, remanent 2, quibus ductis in 4 vicibus 5, vicibus 2, que sunt sub virgis, et in numerum hominum, erunt 320, quibus addam 2, que proveniunt ex 2, quod est sub prima virga, in 1 quod est super 3, quod in 1 quod
fol. 14 recto est super 4, quod in 1 quod est super 5, erunt 322 | que sunt duplum bizantiorum secundi. Quare ducam 322 in 1 quod est super 2, et dividam per 2, venient 161 pro bizantiis secundi hominis. Item extraham 1, quod est super 4, de 4, remanent 3, que ducam in 5 vicibus 2, vicibus 3, que sunt sub aliis virgis, erunt 90, que ducam in 4, et superaddam 6, que proveniunt ex ductis 2 in 3, que sunt sub virgis, quod in 1 quod est super 4, quod in 1 quod est super 5, erunt 366, et tot habuit tertius homo post duplicationem et triplicationem sibi factas a primo et secundo homine; unde si de 366 acceperimus medietatem tertie partis ipsorum, scilicet sextam, venient 61 pro bizantiis tertii hominis. Ad ultimum quippe extraham 1,

Digitized by Google

quod est super 5, de 5, remanent 4, quibus ductis in 2 vicibus 3, vicibus 4, que sunt sub virgis, et illud totum per 4, scilicet per numerum hominum, erunt 384, quibus addam 24, que proveniunt ex multiplicatione de 2 vicibus 3, vicibus 4, que sunt sub virgis, ducta in id quod est super 5, erunt 408, et tot habuit quartus homo, post duplicationem et triplicationem et quadruplicationem sibi factas a primo et secundo et tertio homine. Quare si de 408 acceperimus medietatem tertie quarte partis, hoc est $\frac{1}{24}$, venient 17 pro quantitate bizantiorum quos cepit quartus homo, ut superius inventum est. Aliter, positis $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ per ordinem, et inventis bizantiis 480 pro summa bizantiorum ipsorum quatuor hominum, extraham $\frac{1}{2}$ de uno integro, et pro $\frac{1}{2}$ quod remanet accipiam medietatem de 480, et superaddam 1 quod provenit ex ducto 1 in 1, quod in 1, quod in 1, que unitates sunt super IIII^{or} virgis, erunt $\overline{24}$, et tot cepit ex ipsa summa primus homo. 741
Rursus extraham $\frac{1}{3}$ de uno integro, remanent $\frac{2}{3}$, de quibus accipiam medietatem, veniet $\frac{1}{3}$, pro quo accipiam $\frac{1}{3}$ de 480, et superaddam 1, quod provenit ex ductione dictarum unitatum in se, et habebo 161, et tot cepit secundus homo. Item tollam $\frac{1}{4}$ de uno integro, remanebunt $\frac{3}{4}$, de quibus accipiam medietatem tertie partis ipsarum, veniet $\frac{1}{8}$, pro quo accipiam octavam partem de 480, et addam similiter 1, et habebo 61 pro bizantiis tertii hominis. Adhuc demam $\frac{1}{5}$ de uno integro remanent $\frac{4}{5}$, de quibus accipiam medietatem tertie quarte partis ipsorum, veniet $\frac{1}{30}$, pro quo accipiam trigeximam partem de 480, et super addam 1, et habebo 17 pro bizantiis quarti hominis.

Digitized by Google

Questio similis suprascripte de tribus hominibus.

Item tres homines habebant bizantios, et cum primus duplicavit bizantios reliquorum, nec non et addiderit eis medietatem omnium que habebant, et secundus triplicaverit | bizantios tertii et primi hominis, et addiderit eis tertiam bizantiorum ipsorum, et tertius quadruplicavit bizantios reliquorum, et addiderit eis quartam bizantiorum ipsorum, et habuit unusquisque suam partem, scilicet tertiam. Sciendum est primum, quod quando aliqua res duplicatur et additur super eam medietas eius, tunc illa res sui dupli et dimidii est $\frac{2}{3}$. Similiter cum aliqua res triplicatur et additur ei tertia pars sui, tunc illa res sui tripli et tertie est $\frac{3}{10}$. Eodemque modo, cum aliqua res quadruplicatur et additur ei quarta ipsius rei, tunc illa res et quadrupli sui et quarte est $\frac{4}{17}$, quare ponam in ordine $\frac{4}{17}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{2}{3}$, et imitabo primum ultimam regulam predictam, hoc est cum multiplicabo 5 vicibus 10, vicibus 17, que sunt sub virgis, venient 850 pro tertia parte totius summe eorum, quos multiplicabo per 3, propter homines qui sunt tres, et erunt biz. 2550 pro tota summa, et extraham $\frac{2}{3}$ de uno integro, remanebunt $\frac{1}{3}$ de 2550, et superaddam biz. 24, qui proveniunt ex 2 vicibus 3, vicibus 4, que sunt super virgis, erunt 1554, et tot habuit primus. Et extraham $\frac{3}{10}$ de uno integro, remanebunt $\frac{7}{10}$ de 2550, et superaddam 60, que proveniunt ex multiplicatione de 5, que sunt sub virga, vicibus 3, vicibus 4, que sunt super virgis, erunt 1845, de quibus ac-

Digitized by Google

cipiam $\frac{7}{5}$, hoc est multiplicabo 1845 per 2, et dividam per 3, vel quintam de 1845, que est 369, multiplicabo per 2, quod est pulchrius, venient 738, et tot habuit secundus. Rursus extraham $\frac{4}{17}$ de uno integro, remanebunt $\frac{13}{17}$, pro quibus accipiam $\frac{13}{17}$ de 2550, hoc est dividam 2550 per 17, et quod provenerit multiplicabo per 13, venient 1950, super que addam 200, que proveniunt ex 5 vicibus 10, que sunt sub virgis, vicibus 4, que sunt super virga, erunt 2150, et tot habuit tertius homo, quando quadruplicavit bizantios reliquorum, et addidit ei quartam partem; unde si de bizantiis 2150 acceperimus $\frac{3}{5}$ ex tribus decimis eorum, hoc est $\frac{3}{15}$ ipsorum, venient 258, et tot habuit tertius homo. Est enim hic modus similis secundo, quia cum hoc per secundum modum facere voluimus, extrahamus 2 de 5, et 3 que restant, multiplicabo per 10 vicibus 17, vicibus 3, et habebo 1530, et hoc est accipere $\frac{3}{5}$ de 1550, et addam postea 24 super 1530, et habebo similiter pro bizantiis primi hominis 1554. Item extraham 3 de 10, et 7 que remanent ducam in 17 vicibus 5, vicibus 3, et habebo $\frac{7}{10}$ de 2550, et sic possumus eodem modo in similibus operari. | Et quia quatuor fol. 15 recto
inventi numeri sunt sibi invicem comunicantes, et est senarius comunis eorum mensura, si diviserimus unumquemque eorum per 6, habebitur solutio huius questionis in minoribus numeris, et summa eorum erit 425, et biz. primi erunt 259, secundi 123, tertii 43.

Digitized by Google

Epistola suprascripti Leonardi ad Magistrum Theodorum, phylosophum domini Imperatoris.

Assiduis rogaminibus et postulationibus a quodam mihi amicissimo invitatus, ut modum sibi conponerem solvendi subscriptas avium et similium questiones, quia ipse tanquam noviter in hoc magisterio educatus, fortiora pabula in libro meo numeri apposita pavescebat, lac sibi, velut noviter genito filio, suavitatis preparans, ut robustus effectus capere valeat artiora, presentem sibi modum inveni, per quem, non solum similes questiones solvuntur, verum et omnes diversitates consolaminum monetarum. Et quia ipsum in illa scientia prestantiorem et utilem elegi, vobis, reverende pater domine Theodore, imperialis aule summe phylosophe, mictendum decrevi, ut ipso perlecto, que utilia sunt vestre celsitudinis probitas, resecatis superfluis, reconservet.

De avibus emendis secundum proportionem datam.

Quidam emit passeres 3 pro uno denario, et turtures 2 pro uno denario, et columbam 1 pro dr. 5, et ex his tribus generibus avium, habuit aves 30 pro denariis 30; queritur quot aves emit ex unoquoque genere. Posui primum passeres 30 pro 10 denariis, et servavi denarios 20, qui sunt differentia que est a 10 denariis usque in 30, et mutavi unum ex passeribus in turturem, et fuit augmentum in ipsa mutatione $\frac{1}{2}$ unius denarii, quia passer vale-

Digitized by Google

bat $\frac{1}{3}$ unius denarii, et turtur valebat $\frac{1}{2}$ unius denarii, scilicet $\frac{1}{6}$ unius denarii, plus pretio passeris, et mutavi iterum unum ex passeribus in columbam, et melioratus sum in ipsa mutatione dr. $\frac{2}{3}$ 1, scilicet differentia que est a $\frac{1}{3}$ unius denarii usque in dr. 2, et feci sextas ex ipso denario $\frac{2}{3}$ 1, et fuerunt sexte 10; et secundum hoc opportuit me mutare passeres in turtures et columbas, donec ex ipsa mutatione proveniant illi dr. 20, quos superius servavi; quare ex ipsis feci sextas, et fuerunt sexte 120, quas divisi in duas partes, quarum una posset dividi per 10 integraliter, et alia per 1, et summa utriusque divisionis non ascenderet in 30; et fuit prima pars 110, et alia 10, et divisi primam partem, | scilicet 110, per 10, et secun- fol. 15 verso
dam per 1, et habui columbas 11, et turtures 10, quibus extractis de avibus 30, remanserunt 9, pro numero passerum, quia passeres 9 valent denarii 3, et turtures 10 valent denarii 5, et columbe 11 valent denarii 22, et sic ex istis tribus generibus avium habebuntur aves 30 pro 30 denariis, ut quesitum est.

T X

De eodem.

Et si volumus habere aves 29 pro denariis 29, eodem modo possumus operari, videlicet pretium 29 passerum, qui sunt aves viliores, extrahemus de denariis 29, et de reliquis faciemus sextas, et erunt sexte 116, quas dividemus iterum in duas partes, quarum una dividatur integraliter per 10, et altera per 1, et summa utriusque divisionis non ascendat in 29, que partes dupliciter fieri possunt; primum ut prima pars sit 110, secunda 6, et

Digitized by Google

dividantur 110 per 10, venient columbe 11, et 6 dividantur per 1, venient turtures 6, quibus extractis de 29, remanent 12 pro numero passerum, vel 116 dividemus in 100 et 45, et dividemus 100 per 10, et 16 per 1, et habebimus columbas 10, et turtures 16, relique que sunt usque in 29, scilicet 3, erunt passeres, et sic soluta est hec questio dupliciter.

Item de avibus.

Et si volumus habere aves 15 pro denariis 15, hoc esse non posse sine fractione avium demonstrabo. Verbi gratia si extraxero pretium 15 passerum de denariis 15 et de residuis denariis faciam sextas, que sunt 60, non poterunt dividi in duas partes, quarum una divisa per 10 et altera per 1 veniat numerus integrus ex ipsis duabus divisionibus, qui sit minor de 15. Exempli causa si divisero 60 in 50 et in 10, et divisero 50 per 10, et 10 per 1 venient ex ipsis duabus divisionibus 5 et 10, quibus insimul iunctis faciunt 15, scilicet summa omnium avium, et sic non caderet aliquis passer in hac emptione, quia columbe 5 valent dr. 10, et turtures 10 valent dr. 5, et sic, ex his duobus generibus avium tantum, habentur aves 15 pro denariis 15, et non est numerus aliquis alius infra 60 maior quam 50, qui integraliter dividatur per 10, et minor eo hic locum non habet, quia si poneremus 40 pro una parte, remanent pro alia parte 20, unde si 40 dividantur per 10, et 20 per 1, egredierentur ex istis duabus divisionibus 24 aves, que locum non habent, cum debeant esse 15. Sed si volemus frangere aves, dividemus 60 su-

Digitized by Google

pradicta in 55, et 5, et dividemus 55 per 10, venient columbe $\frac{1}{2}$ 5, et dividemus 5 per 1, venient turtures 5. Extractis itaque columbe $\frac{1}{2}$ 5 et turtibus 5 de avibus | 15 remanabunt passeres $\frac{1}{2}$ 4, quorum pretium est dr. 1 et semis, et pretium 5 turturum est dr. $\frac{1}{2}$ 2, et pretium columbarum $\frac{1}{2}$ 5 est dr. 11. Et sic ex his tribus generibus avium habentur aves 15 pro denariis 15. fol. 16 recto

Et si volumus habere aves 15 pro denariis 16, hoc integraliter poterit, quia extractis dr. 5, scilicet pretium passerum 15, de denariis 16, remanent denarii 11, qui sunt sexte 66, quibus divisis in 60 et in 6, dividetur 60 integraliter per 10, et 6 per 1, et ex ipsis divisionibus venient columbe 6 et turtures 6, relique que sunt usque in 15 sunt passeres, et sic possumus in omnibus similibus operari. Sed ut ea que dixi liquidius sapientia vestra intelligat, aliam huiusmodi proponam questionem, videlicet ut passeres 3 dentur pro uno denario, et columba valeat dr. 2, et perdix valeat dr. 3, et volo ex his tribus generibus avium aves 30 pro denariis 30 habere. Extraham quidem supradicto modo de denariis 30 pretium passerum 30, quod est 10, remanebunt dr. 20, quos servabo, et mutabo unum ex passeribus in columbam, et erit melioratio dr. $\frac{2}{3}$ 1, scilicet 5 tertie unius denarii, et mutabo iterum alium passerem in perdicem, et erit melioratio eius $\frac{2}{3}$ 2, hoc est tertie 8, que sunt differentia que est a pretio unius passeris usque in pretium unius perdicis, et faciam tertiam ex denariis 20 servatis, et erunt tertie 60, quas dividam in duas partes, quarum una dividatur integraliter per 8, et alia per 5, et que ex utraque divisione pervenerint non ascendant in 30; eritque

Digitized by Google

una illarum duarum partium 40, at altera 20, et dividam 40 per 8, venient perdices 5, et dividam 20 per 5 venient columbe 4, relique que sunt usque in 30, scilicet 21, sunt passeres,

Item passeres 5 valent dr. 1, et turtures tres dentur pro uno denario, et columba valeat dr. 2, et perdix valeat dr. 3, et volo ex his quatuor generibus avium habere aves 24 pro dr. 24. Ponam pretia uniuscuiusque generis avium in ordine, videlicet $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ et 2, et 3, ut in margine cernitur, et extraham pretium unius passeris de pretio cuiusque reliquorum trium generum, scilicet $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ et de 2, et de 3, et residua ponam super ipsa pretia, et habebo $\frac{2}{15}$ super $\frac{1}{3}$, et $\frac{4}{5}$ 1, scilicet $\frac{27}{15}$, super 2, et $\frac{4}{15}$ 2, scilicet $\frac{43}{15}$, super 3; deinde pretium 24 passerum extraham de denariis 24, remanebunt dr. $\frac{1}{3}$ 19, quas multiplicabo per 15, ut faciam ex eis quindecimas, sicut sunt differentie suprascripte, erunt $\frac{5}{15}$ 288, quas dividam in tres partes, quarum | una integraliter dividatur per 42, et altera per 27, et tertia per 2, quia melioratio mutationis passeris in columbam est $\frac{27}{15}$, et melioratio mutationis passeris in turturem est $\frac{2}{15}$, et ideo dividende sunt $\frac{5}{15}$ 288 in tres partes, quarum una dividatur integraliter per 42, secunda per 27, tertia per 2, et quod ex ipsis tribus divisionibus provenerit cadat infra numerum avium emptarum, scilicet infra 24, quod poterit fieri dupliciter; primum, de 288 extraham quadruplum de 42, et de 27, scilicet 168 et 108, que sunt in summa 276, et remanebunt pro tertia parte 12, et dividam 168 per 42, et 108 per 27, et 12 per 2, venient perdices 4, et columbe 4, et turtures 6, que sunt in summa aves 14, relique que sunt

fol. 16 verso

Digitized by Google

usque in 24, scilicet 10, erunt passeres. Vel aliter, ponam pro prima parte quincuplum de 42, pro quo habebuntur perdices 5, et pro secunda parte ponam duplum de 27, pro quo habebuntur columbe 2, et ex ipsis 288 remanebunt 24, que sunt duodecuplum de 2, pro quo duodecuplo habebuntur turture 12, relique vero que sunt usque in 24 aves, scilicet 5, erunt passeres, et sic possumus in similibus, etiam et in consolamine monetarum et bizantiorum operari, quod quandoque placuerit dominationi vestre liquidius declarabo.

De compositione pentagoni equaliter in triangulum equicrurium datum.

Libet etiam solutionem subscripte questionis, quam nuper inveni, lime vestre correctionis transmittere. Videlicet cum in triangulo equicrurio noto protractum sit pentagonum equilaterum, qualiter inveniatur longitudo ipsius lateris demonstrabo. Esto trigonum *a b c* (1), cuius unumquodque latus *a b* et *a c* sit 10, mensura et basis *b c* sit 12, et in ipso trigono protractum sit pentagonum equilaterum *a d e f g*, et volo invenire longitudinem uniuscuiusque lateris pentagoni; protraham primum in triangulo *a b c* perpendicularem *a h*, que erit nota, cum nota sint latera *a b* et *b h*, et erit longitudo eius 8, et a puncto *d* super latus *b c* protraham cathetum *d i*, que equidistabit catheto *a h*, quare triangulus *d b i* similis est triangulo *a b h*, quare proportio *i b* ad *b d* est sicut proportio *h a* ad *b a*, nec

(1) Vedi Fig. 6.

Digitized by Google

non et proportio *i d* ad *d b* est sicut proportio *h a* ad *a b*, sed *h a* ex *a b* est $\frac{5}{3}$, quare et *i d* est $\frac{4}{3}$ ex *d b*, et est *b h* ex *b a* $\frac{3}{5}$, cum *b a* sit 10, et *b h* sit 6, scilicet medietas | ex *b c*, erit et *i b* ex *b d* $\frac{3}{5}$; et quia latera pentagoni *a d* et *a g* sunt sibi invicem equalia, si auferatur *a d* ex *a b* et *a g* ex *a c*, remanebunt recte *d b* et *g c* sibi invicem equales; sunt enim *g f* et *d e* equales, due ergo recte *g c* et *g f* duabus *b d* et *d e* sunt equales, et angulus *f c g* angulo *e d b* est equalis, cum equicrurium sit trigonum *a b c*, quare basis *b e* basi *f* est equalis, est enim *b h* equalis *c h*, unde si ex *b h* auferatur *b e*, et ex *c h* auferatur *c f*, remanebit *f h* equalis *h e*. His itaque omnibus intellectis, ponam unumquodque latus pentagoni rem, et erit *c h* medietas rei, quare *b e* erit 6 minus medietate rei, et auferam *a d* ex *a b*, scilicet rem de 10, remanebit *d b* 10 minus re, de quibus accipiam $\frac{4}{3}$, et habebo pro catheto *d i* 8 minus $\frac{4}{3}$ rei, et accipiam rursus $\frac{2}{5}$ *d b*, et habebo 6 minus $\frac{2}{5}$ rei pro linea *b i*, est enim et *b e* 6 minus medietate rei, quare si auferamus *b i*, ex *b e*, remanebit *i e* $\frac{1}{10}$ rei, et sic erunt latera trianguli *d e i* nota, et quia angulus *d c e* est rectus, erunt quadrilatera laterum *d i* et *i e* equalia quadrato linee *d e*, quod quadratum est census cum *d e* sit res, quare multiplicabo *d i*, scilicet 8 minus $\frac{4}{3}$ rei, in se, venient dragme 64 et $\frac{16}{25}$ census minus rebus $\frac{8}{3}$ 12, et multiplicabo *i e*, scilicet $\frac{1}{10}$ rei, in se, et veniet $\frac{1}{100}$ census, quam addam super $\frac{16}{25}$ census et dragmis 64, diminutis rebus $\frac{4}{3}$ 12, et habebo $\frac{13}{50}$ census et dragmas 64, diminutis rebus $\frac{4}{3}$ 12, que equantur censui, scilicet quadrato lateris *d e*, unde si addidero utrique parti res $\frac{4}{3}$ 12, et tollam ab utraque parte $\frac{13}{50}$ census, remanebunt $\frac{7}{10}$ census et res $\frac{4}{3}$ 12,

fol. 17 recto

Digitized by Google

que equantur dragmis 64, et ut hec reducantur ad censum unum, multiplicanda sunt omnia que habentur, per $\frac{5}{7}$ 2, et erit census et res $\frac{4}{7}$ 36, que equantur dragmis $\frac{5}{7}$ 182, et sic reducta est questio ad unam ex regulis algebre. Unde si ad solutionem quesiti liquidius venire volumus, ponam pro censu quadratum *k l m n* (1), cuius unumquodque latus sit equale lateri pentagoni supradicti, et ducam secundum rectitudinem latera *k n* et *l m* in punta *p o*, et sit unaqueque rectarum *n p* et *m o* $\frac{4}{7}$ 36, et dividatur recta *m o* ad punctum *q* in dua equa, et erit *m q* $\frac{2}{7}$ 18; et quoniam quadratum *k m* est census, erit latus *m n* res, et unumquodque latus *n p* et *m o* est $\frac{4}{7}$ 36, quare tota superficies *n o* est res $\frac{4}{7}$ 36, cui superficiei si addatur quadratum *k m*, erit tota superficies rectiangula *k o* | census et res $\frac{4}{7}$ 36, que, ut superius fol. 17 verso inventum est, equantur dragmis $\frac{5}{7}$ 182, ergo superficies *k o* est dragme $\frac{5}{7}$ 182, que superficies provenit ex *k l* in *l o*, sed *k l* equalis est recte *l m*, ergo ex ductu *l m* in *l o* proveniunt $\frac{5}{7}$ 182, quibus addatur multiplicatio ex *m q* in se, hoc est ex $\frac{2}{7}$ 18, egredientur $\frac{11}{49}$ 517 pro quadrato linee *l q*, de quorum radice, que est secundum propinquitatem 22 et minuta 44 et secunda 33 et tertia 15 et quarta 7, si auferatur linea *m q*, scilicet $\frac{2}{7}$ 18, remanebunt pro quantitate rei *l m*, hoc est pro quantitate uniuscuiusque lateris pentagoni, 4 et minuta 27 et secunda 24 et tertia 40 et quarta 50. Inveni etiam his diebus alias solutiones super similibus questionibus, quas dominationi vestre quandocumque placuerit destinabo.

(1) Vedi Fig. 7.

Digitized by Google

Modus alius solvendi similes questiones.

Item pono solutionem sequentis questionis per quemdam pulchrum modum. Nam questio talis est. Quinque homines denarios habent, ex quibus primus cum medietate denariorum secundi habet 12, secundus cum $\frac{1}{3}$ denariorum tertii hominis habet 15, tertius cum $\frac{1}{4}$ denariorum quarti habet 18, quartus cum $\frac{1}{5}$ denariorum primi habet 23. Ponam hos quinque homines in ordinem, et sub unoquoque eorum ponam suam petitionem, ut hic cernitur.

15760	11268	10161	7428	4938
23	20	18	15	12
Quintus,	Quartus,	Tertius,	Secundus,	Primus,
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{7}\ \frac{88}{105}$ 21	$\frac{5}{7}\ \frac{54}{105}$ 15	$\frac{4}{7}\ \frac{9}{105}$ 14	$\frac{2}{7}\ \frac{31}{105}$ 10	$\frac{3}{7}\ \frac{67}{105}$ 6

Et incipiam a 2, qui sunt sub virga primi hominis, et multiplicabo 2 per 12, qui sunt super ipsum primum, erunt 24, de quibus tollam multiplicationem de 1, quod est super 2, in 15, remanebunt 9, que multiplicabo per 3, que sunt sub virga secundi hominis, erunt 27, quibus addam multiplicationem de 1, quod est super 2, in 1 quod est super 3, ductam in 18, que sunt super tertium hominem, erunt 45, que ducam in 4 que sunt sub virga eiusdem tertii hominis, erunt 180, de quibus tollam id quod provenit ex ducto 1, quod est super 2, in 1 quod est super 3, in 1 quod est super 4, quod in 20, rema-

Digitized by Google

nebunt 160, que ducam in 5, que sunt sub virga quarti hominis, erunt 800, quibus addam 23, que proveniunt ex ducto 1 quod est super 2, in 1 quod est super 3, | quod fol. 18 recto in 1 quod est super 4, quod in 1 quod est super 5, quod in 23, erunt 823, que multiplicabo per 6, que sunt sub virga quinti hominis, erunt 4938, que servabo super primum hominem, et operabor similiter in reliquis quatuor hominibus, videlicet multiplicabo 3, que sunt sub virga, per 15, et tollam semel 18, et residuum multiplicabo per 4, erunt 108, quibus addam multiplicationem de 1 quod est super 3, in 1 quod est super 4, ductam in 20, erunt 128, que ducam in 5, et tollam 23, que veniunt ex uno quod est super 4, quod in 1 quod est super 5, quod in 23, remanebunt 617, que ducam in 6, que sunt sub virga quinti hominis, erunt 3702, quibus addam 12, que proveniunt ex 1, quod est super 3, in 1 quod est super 4, quod in 1 quod est super 5, quod in 1 quod est super 6, quod in 12, erunt 3714, que ducam in 2, que sunt sub virga primi hominis, erunt 7428, que servabo super secundum hominem. Rursurs multiplicabo 4, que sunt sub virga, per 18, et tollam semel 20, residuum multiplicabo per 5, et addam 23, que proveniunt ex 1, quod est super 4, in 1 quod est super 5, quod in 23, et totum illud multiplicabo per 6, que sunt sub virga, erunt 1698, de quibus tollam 12, que proveniunt ex 1, quod est super 4, in 1 quod est super 5, quod in 1 quod est super 6, quod in 12, remanebunt 1686, que ducam in 2, que sunt sub virga, erunt 3372, quibus addam 15, que proveniunt ex 1 quod est super 4, in 1 quod est super 5, quod in 1 quod est super 6, quod in 1 quod est super 2, quod

Digitized by Google

in 15, erunt 3387, que ducam in 3, que sunt sub virga, erunt 10161, que servabo super tertium hominem. Et cum eodem modo operatus fuero in inventione quarti et quinti numeri, habebo super quartum hominem 11268, et super quintum 15760, deinde multiplicabo 2 per 3, que per 4, que per 5, que per 6, que sunt sub virgulis, erunt 720, et multiplicabo 1, quod est super 2, in 1 quod est super 3, quod in 1 quod est super 4, quod in 1 quod est super 5, quod in 1 quod est super 6, venient 1, quod addam cum 720, cum propositorum hominum numerus sit inpar, quia si esset par tolleretur, erunt 721, in quorum regula, que est $\frac{1}{7}$ de 103, dividendi sunt suprascripti numeri per ordinem, et habebo quantitates uniuscuiusque eorum, ut superius in questione cernitur.

Investigatio unde procedat inventio suprascripta.

fol. 18 verso Et si unde talis inventio procedat | habere volueritis, vobis illud, tanquam domino venerando, mittere procurabo. Solvuntur etiam similes questiones aliter, ut in libro meo denominato vestra Sapientia poterit invenire. Et si super dr. uniuscuisque adderetur eadem pars denariorum reliquorum quatuor hominum, que additur in dicta questione unicuique de suo consequente, et haberet primus 12, secundus 15, et cetera ut supra, tunc questio esset insolubilis, nisi concederetur primum habere debitum, quod debitum esset $\frac{97}{197}$ 13, et secundus haberet $\frac{1}{2}$ $\frac{146}{197}$ 2, tertius $\frac{98}{197}$ 11, quartus $\frac{1}{2}$ $\frac{123}{197}$ 15, quintus $\frac{30}{197}$ 20.

Digitized by Google

Incipit liber quadratorum conpositus a Leonardo Pisano. Anni M. CC. XXV. fol. 19 recto

Cum Magister Dominicus pedibus celsitudinis vestre, princ̃ps gloriosissime domine F., me Pisis duceret presentandum, occurrens Magister Iohannes panormitanus, questionem mihi proposuit infrascriptam, non minus ad geometriam quam ad numerum pertinentem, ut invenirem numerum quadratum, cui quinque additis vel diminutis, semper inde quadratus numerus oriretur. Super cuius questionis solutione a me iam inventa considerans, vidi quod habebat originem solutio ipsa ex multis, que quadratis et inter quadratos numeros accidunt. Nuper autem cum relationibus pisane potestatis, et aliorum reddeuntium ab imperiali curia, intelleximus quod dignatur vestra sublimis Maiestas legere super librum quem c̃ompo- T 11
sui de numero, et quod placet vobis audire aliquotiens subtilitates ad geometriam et numerum contingentes, rememorans in vestra curia, et a vestro phylosopho suprascriptam mihi propositam questionem, ab ea sumpsi

Digitized by Google

materiam, et opus incepi ad vestrum honorem condere infrascriptum, quod vocari librum volui quadratorum, veniam postulans patienter, si quid in eodem plus vel minus iusto vel necessario continetur, cum omnium habere memoriam, et in nullo peccare, sit divinitatis potius quam humanitatis, et nemo sit vitio carens, et undique circumspectus.

Consideravi super originem omnium quadratorum numerorum, et inveni ipsam egredi ex ordinata inparium ascensione. Nam unitas quadrata est, et ex ipsa efficitur primus quadratus, scilicet unum, cui unitati addito ternario facit secundum quadratum, scilicet 4, cuius radix est 2, cui etiam additioni si addatur tertius inpar numerus, scilicet 5, tertius quadratus procreabitur, scilicet 9, cuius radix est 3, et sic semper per ordinatam inparium collectionem ordinata consurgit et series quadratorum, unde cum volumus II^{os} quadratos numeros invenire, quorum additio faciat quadratum numerum, accipiam qualem voluero quadratum inparem, et habebo ipsum pro uno ex duobus dictis quadratis, reliquum inveniam ex collectione omnium inparium, qui sunt ab unitate usque ad ipsum quadratum inparem. Verbi gratia accipiam 9 pro uno ex dictis duobus quadratis, reliquus habebitur ex collectione omnium inparium qui sunt sub 9, scilicet de 1 et 3 et 5 et 7, quorum summa est 16, qui est quadratus, quo addito cum 9 egredientur 25, qui numerus est quadratus. Et si geometrica uti volumus demostratione, adiaceant quotcunque numeri inpares ab unitate per ordinem ascendendo, donec extremus eorum quadratus fiat, et sint a^1b, b^5c, c^5d, d^7e, e^9f, et sit e^9fqua-

Digitized by Google

dratus, et quoniam *e f* est quadratus, et $a^{16}e$ est quadratus, cum procreetur ex ordinata collectione inparium *a b* et *b c* et *c d* et *d e*, et totus $a^{25}f$ numerus est similiter quadratus, et sic ex duobus quadratis *a e* et *e f* fit quadratus *a f*.

Item aliter, accipiam aliquem quadratum parem, cuius medietas sit par | ut 36, cuius medietas est 18, et auferam ab eo, et addam eidem 1, egredientur 17 et 19, qui sunt inpares numeri et continui, cum nullus par numerus cadat inter eos, ex horum quoque addictione procreatur 36, qui est quadratus, et ex addictione reliquorum inparium qui sunt ab uno usque in 15, procreatur 64, ex quibus quadratis procreatur 100, qui est quadratus, et procreatur ex collectione inparium numerorum qui sunt ab uno usque in 19.

Ad inveniendos plures quadratos numeros.

Ex hac regula de collectione duorum numerorum quadratorum possumus recolligere plures numeros quadratos; et ut hec aperte videamus, volumus colligere 5 quadratos numeros, quorum primus et secundus simul iuncti faciant quadratum numerum, et super eorum ~~additione tertio addito~~ eveniat quadratus numerus, et etiam super addictionem predictorum trium quarto numero addito fiat quadratus numerus. Ita exerceamus; ponamus primus numerus eorum 9, et per predictam regulam inveniemus secundum numerum isto modo, quod colligemus omnes inpares numeros qui sunt ab 1 usque in 9, qui numeri inpares sunt isti 1, 3, 5, 7, et omnes insimul

Digitized by Google

additi faciunt 16 pro secundo quadrato, itaque si addideris cum 9 habebis 25, et per suprascriptum modum potest inveniri tertius quadratus, quod ponebis in margine omnes impares numeros, qui sunt ab 1 usque in 25, qui sunt 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, et omnes additi faciunt 144 pro tertio numero quadrato, et adde cum summa predictorum duorum quadratorum, que est 25, habebis 169 pro summa trium quadratorum, et isto modo invenies quartum quadratum ponendo omnes inpares, qui sunt ab 1 usque in 169, et invenies quartum quadratum 7056, et summa predictorum trium numerorum superaddita, que est 169, erit eorum summa 7225, et isto modo, et ex predicta summa potest inveniri quintus quadratus, ponendo omnes inpares numeros qui sunt ab 1 usque in 7225, et invenies pro quinto quadrato eorum 13046544, cui quinto numero si addideris summam predictorum quatuor, habebis pro summa omnium 5 numerorum quadratorum 13053769, et isto modo poteris plures quadratos numeros invenire (1). Vel accipiam quadratum numerum inparem, cuius tertia pars sit integra, ut 81, cuius tertia est 27, et accipiam ipsum 27 cum duobus inparibus numeris, quibus ipse est medius, scilicet 25 et 29, et hi tres numeri coniuncti faciunt 81, qui est quadratus, et ex aliis, qui sunt ab uno usque in 23, egredientur 144, cuius radix est 12; additis ergo 144 cum 81, efit summa collectionis inparium numerorum,

7 x.

tum

(1) Tutto ciò che è compreso dalle parole *Ad inveniendos plures quadratos numeros* della linea 16 della pagina antecedente infino alle parole *quadratos numeros invenire* della linea 19 di questa pagina, si trova scritto nel margine della carta 19 *verso* del Codice Ambrosiano *E.* 75, *parte superiore.*

Digitized by Google

qui sunt ab uno usque in 29, scilicet 225, qui numerus est quadratus, et est eius radix 15. Simili quoque modo possunt inveniri quatuor, et plures continui inpares numeri, ex quorum collectione procreatur quadratus numerus, et ex reliquis, qui sunt sub ipsis usque ad unitatem, procreabitur alius quadratus, et ipsi duo quadrati facient semper quadratum numerum. Similiter inveni unumquemque quadratum excedere ipsum quadratum, qui ante eum est, in medietate secundum quantitatem addictionis radicum ipsorum. Verbi gratia 121, cuius radix est 11, excedit 100, cuius radix est 10 secundum quantitem addictionis de 10 et 11, scilicet radicum ipsorum. Quare unusquisque quadratus excedit secundum quadratum ante ipsum, secundum quantitatem quadrupli radicis quadrati, qui est in medio eorum, ut 121, qui excedit 81 in quadruplum de 10, et sic possunt inveniri differentie que sunt inter quadratos per distantiam radicum ipsorum. Et quando due continue radices aggregate faciunt quadratum numerum, tunc quadratum maioris radicis equabitur duobus quadratis. Similiter quando quadruplum alicuius radicis est quadratus, tunc quadratus sequentis radicis equabitur duobus quadratis, quorum unus erit ille qui creatus est ex quadrato predicto, et alius est, cuius radix est uno minus radice quadruplicata; si quadruplicetur 9 egredietur 36, ergo 100, cuius radix est 10, equatur 64, cuius radix est 8, et 36 qui fuit quadruplum de 9. Et nota quia ex quadruplicatione alicuius numeri non egredietur quadratus, nisi ipse fuerit quadratus, quia, ut Euclides ostendit, cum proportio numeri ad numerum est sicut proportio quadratorum, tunc factus ex multiplica-

Digitized by Google

tione eorum, quadratus eorum, et quia 4 quadratus est, oportet ut fiat quadratus ille numerus, quem multiplicat, ut factus ex eis est quadratus. Et sic possumus multimode tres quadratos numeros invenire, quorum unus semper equabitur reliquis aggregatis. Sed unde oriatur omnem
fol. 20 recto quadratum excedere | quadratum antecedentem sibi, secundum quantitatem addictionis radicum ipsorum, ut diximus patebit, si radices eorum ponamus in lineas *a b* et *b g* (1), et quoniam *a b* et *b g* sunt numeri continui, erit unus eorum maior alio. Sit ergo *b g* uno plus quam *a b*, et auferatur ex *b g* unitas *d g*, remanebit *b d* equalis *b a*; et quoniam *b g* numerus divisus est in duo, scilicet in *b d* et *d g*, erit multiplicatio *b d* in se cum *d g* in se, et cum duplo *d g* in *b d*, equalis multiplicationi *b g* in se. Sed multiplicatio *b d* in se equatur multiplicationi *a b* in se, ergo quadratus, qui fit a numero *b g*, superhabundat eum, qui fit a numero *a b*, secundum quantitatem multiplicationis *g d* in se, et dupli *g d* in *b d*; sed multiplicatio *d g* in se est unus, qui est equalis unitati *d g*, vel est eadem, et multiplicatio dupli *d g* in *b d* facit duplum ex *b d* cum *d g* sit 1, ergo duplum *b d*, est *a d*; ergo quadratus, qui fit a numero *b g*, excedit quadratum, qui fit a numero *a b*, secundum quantitatem addictionis radicum eorum, qui sunt *a b*, et *b g*, quod opportebat ostendere.

Aliter, quoniam *b d* (2) numerus equatur numero *b a*, erit totus *a d* divisus in duo equa super punctum *b*, cui

(1) Vedi Fig. 8.
(2) Vedi Fig. 9.

Digitized by Google

addita est unitas *d g*, erit ergo multiplicatio *d g* in *a g*, cum quadrato qui fit a radice *a b*, equalis quadrato qui fit a radice *b g*, quare quadratus, qui fit a numero *b g*, excedit quadratum, qui fit a numero *a b*, secundum id quod fit ex ductu *b g* in *a g*, sed *d g* in *a g* facit numerum *a g*, cum *d g* sit unum, ergo quadratus *b g* excedit quadratum, qui fit ab *a b*, secundum additionem radicum ipsorum, que addictio est numerus *a g*. Similiter ostenditur omnem quadratum excedere omnem quadratum minorem sui, secundum multiplicationem superhabundantie radicum ipsorum in addictione utriusque radicis. Verbi gratia sint due radices duarum quorumlibet quadratorum *a g* et *g b*, et sit *g b* maior quam *a g*, secundum numerum *d b*, quare multiplicatio *a g* in se, cum *d b* in *a b*, equatur multiplicationi *g b* in se, ergo quadratus, qui fit a numero *g b*, excedit quadratum, qui fit ab *a g*, in id quod radix *g b* excedit radicem *a g* ductam in utramque radicem, scilicet in hoc quod fit ex ductu *d b* in *a b*, quod oppertebat ostendere. | o

Est enim alius modus inveniendi duos quadratos facientes coniunctum ex eis numerum quadratum, qui in X° Euclidis reperitur. Adiaceant duo quadrati numeri simul pares vel impares *a b*, ~~*a d*~~ (1), quare compositum ex eis *a g* erit par, et esto *a b* maior quam *b g*, et dividatur *a g* in duo equa secundum *d*. Numerus ergo integer est *a d*, cum sit medietas numeri *a g*, et extracto *a d* ex *a b* numero, remanebit *d b* numerus integer, et quoniam *a g* numerus divisus est equaliter | et inequaliter in *d b*, erit mul- | c g

fol. 20 verso

(1) Vedi Fig. 10.

Digitized by Google

tiplicatio *a b* in *d g* cum quadrato qui fit a numero *d b*, equalis quadrato qui fit a numero *d g*, sed id quod fit ex ductu *a b* in *b g* quadratus est, cum quadrati sint numeri *a b* et *b g*, quadratus est etiam id quod fit a numero *d b;* et sic inventi sunt duo quadrati facientes coniunctum ex eis quadratum numerum, ipsum videlicet qui fit a numero *d g*, quod opportebat facere.

Volo demonstrare quare ex ordinata inparium collectione ab uno incipiendo in infinitum egradiatur ordinata series quadratorum; adiaceant numeri continui ab unitate *a* quotcumque *b g*, *g d*, *d e*, *e z*, *z i* (1), et componatur *b g* cum *a* unitate, et egrediatur numerus *t*, similiter componatur unusquisque numerus cum suo antecedente et cum suo sequente, et sit conpositus numerorum *b g* et *g d* numerus *k*, numerorum vero *g d* et *d e* numerus *l*, numerorum autem *d e* et *e z* numerus *m*, ipsorum videlicet qui sunt *e z* et *z i* numerus *n*, dico primum numeros *t*, *k*, *l*, *m*, *n* inpares esse, et continuos ab unitate; numerus enim *z i* aut par est aut inpar, si par est numerus *z i*, inpar est numerus *e z*, et si inpar est numerus *z i*, par est numerus *e z*, continui enim sunt; quare conpositum numerorum *e z*, *z i*, scilicet *n*, est inpar. Eodemque modo numeros *l k t* inpares esse monstrabuntur, dico quidem continuos inpares esse numeros *t*, *k*, *l*, *m*, *n*, ex coniuncto quidem *e z* cum *z i* factus est numerus *n*, et ex coniuncto *d e* cum *e z* factus est numerus *m*. Quot ergo superhabundat numerus *z i* numerum *d e*, tot superhabundat numerus *n* numerum *m*. Superhabundat enim *z i* numerum *e z*

(1) Vedi Fig. 11.

Digitized by Google

in uno, in quo etiam numerus *e z* superhabundat numerum *d e*, ergo numerus *z i* superhabundat numerum *d e* in duobus. Quare numerus *n* superhabundat numerum *m* similiter in duobus, in quibus etiam invenitur eodem modo numerum *m* superhabundare numerum *l*, et numerum *l* numerum *k*, et numerum *k* numerum *t*, et numerum *t* unitatem *a*, continui ergo inpares sunt ab unitate numeri *t*, *k*, *l*, *m*, *n*, ut prediximus.

Et, ut ostensum est superius, quadratus qui fit a numero *z i* excedit quadratum qui fit a numero *e z*, in numero qui fit ex coniuncto *e z*, *z i*, hoc est in numero *n*. Similiter ostenditur quadratus, qui fit a numero *e z*, superhabundare quadratum, qui fit a numero *d e*, in coniuncto numerorum *d e*, *e z*, hoc est in numerum *m*. Et quadratus, qui fit a numero *d e*, superhabundat quadratum, qui fit a numero *g d*, secundum numerum *l*, et quadratus, qui fit a numero *g d*, superhabundat quadratum, qui fit a numero *b g*, secundum *k*, et quadratus a numero *b g* superhabundat quadratum unitatis, secundum numerum *t*; est enim *t* ternarius, et *b g* est binarius, ergo si super quadratum unitatis, hoc est super 1, addatur numerus *t*, in quo quadratus numeri *b g* superhabundat quadratum unitatis, veniet quadratus numeri *b g*, super quem addito numero *k*, veniet quadratus numeri *g d*, super quem quadratum | si addatur numerus *l*, veniet quadratus numeri *d e*, super quem quadratum si addatur numerus *m*, veniet quadratus numeri *e z*, super quem numerum si addatur numerus *n*, in quo quadratus numeri *z i* superhabundat quadratum numeri *e z*, manifeste veniet quadratus numeri *z i*. Sunt enim numeri *a*, *b g*, *g d*, *d e*, *fol. 21 recto*

Digitized by Google

e z, *z i* continui, et eorum quadrati surgunt ex collectione continua inpari numerorum *a*, *t*, *k*, *l*, *m*, *n*, ut opportebat ostendere.

Invenire duos numeros, quorum quadrati insimul iuncti faciunt quadratum factum ex coiunctione quadratorum duorum aliorum numerorum datorum. Sint dati duo numeri *a* et *b* (1), quorum quadrati insimul iuncti faciunt quadratum numerorum *g*, oportet duos alios numeros invenire, quorum quadrati insimul coniuncti faciant equale numero. Inveniantur alii duo numeri, quorum quadrati insimul iuncti faciant quadratum numerum, ex mensura quorum faciant recte *d e*, *e z*, et conponantur facientes angulum rectum, ipsum videlicet qui est sub *d e z*, latus quoque *d e* potest super latera *d e*, et *e z*, quadratum quidem, qui fit a recta *d z*, aut est equalis *g*, aut non, esto prius equalis, inventi sunt ergo alii duo numeri, quorum quadrati coniuncti faciunt quadratum numerum equalem numero *g*, quorum unus est equalis recte *d e*, alter est equalis recte *e z*. Si autem quadratus qui fit a recta *d z*, hoc est a numero *d z*, non est equalis numero *g*, erit itaque maior ipso, vel minor, esto prius maior, et quoniam quadratus, qui fit a numero *d z*, maior est numero *g*, erit numerus *d z*, maior radice *g*; accipiatur ergo radix numeri *g*, que sit 1 numerus, et accipiatur equalis *i a* numero *d z*, sitque *t z*, et a puncto *t* super rectam *e z*, cathetus protrahatur *t k*, equidistans ergo est *t k*, recte *de*. Quare triangulus *t k z* similis est triangulo *d e z*, est ergo sicut *z d* ad *z t*, ita *d e* ad *t k*. Sed proportio *z d* ad *z t*

(1) Vedi Fig. 12.

Digitized by Google

Digitized by Google

Quare si b est maior quam a, erit d maior g, et si minor est b quam a, minor itaque esset d quam g. Quare fol. 22 verso numeri $a\ g$, aut | ambo sunt minores, aut ambo maiores numeris $b\ d$, equales quidem esse non possunt, quia si equales essent, iam numeri a, g, b, d non essent IIII^{or}.

Sint ergo $a\ g$ minores, quare factus ex eis, scilicet $t\ k$, minor est facto ex $b\ d$, hoc est quam $k\ l$, et quoniam est ut a ad g, ita quadratus, qui fit ab a, ad numerum, qui fit ex a in g, hoc est ad numerum $t\ k$. Rursus quoniam est sicut a ad g, ita b ad d, sed sicut b ad d, ita quadratus, qui fit a numero b ad numerum, qui fit ex b in d, hoc est ad numerum $k\ l$. Per equale ergo est ut a ad g, ita quadratus, qui fit a numero b, est ad numerum $k\ l$, sed sicut a ad g, ita fuit quadratus, qui fit ab a ad numerum $t\ k$, quare et conpositi et proportionales erunt, hoc est a ad g, ita conpositus quadratorum, qui fiunt a numeris $a\ b$, est ad conpositum duorum numerorum $t\ k$ et $k\ l$, hoc est numerus e ad numerum $t\ l$. Similiter ostendetur quod sicut a ad g, ita $t\ l$ ad z, quare est sicut e ad $t\ l$, ita $t\ l$ ad numerum z, ergo numerus $l\ z$ medius proportionalis est numerorum $e\ z$. Quare quadratus, qui fit a numero $t\ l$, equatur superficiei rectianguli, que fit ex numeris $e\ z$, sed superficies numerorum, que fit a numeris $e\ z$, est numerus $e\ f$, quare $e\ f$ est quadratus, cuius radix est $t\ l$. Aliter, quoniam ostensum est numerum $e\ f$ in superiori demonstratione equari IIII^{or} quadratis, qui fiunt a numeris $h\ k$, $k\ l$, $m\ n$, $n\ o$, demonstrabo quidem quadratum, qui fit a numero $t\ l$, equari eisdem IIII^{or} quadratis, hoc modo. Quadratus quidem, qui fit a numero $t\ l$, equatur duobus quadratis, qui fiunt a

multiplicatur per quadratum numerum, factus ex multiplicatione quadratus erit. Quare quadrati sunt qui fiunt ex ductu *e* in quadratos qui fiunt a numeris *g d*, sed coniunctus ex quadratis numerorum *g d* est *z*, et ex *e* in *z* provenit *c f*, quod opportebat ostendere.

Similiter si numeri *e z* quadrati fuerint, erunt duo alii numeri quadrati, qui coniuncti facerent numerum *c f*, et sunt illi, qui egrederentur a numeris *a b* et ex ductu *e* in quadratis qui fiunt a numeris *g d*; et, sicut dixi, si unus ex numeris *e z* quadratus fuerit, equatur numerus *c f* ter duobus diversis quadratis, et si ambo quadrati fuerint, equabitur numerus *c f* quater duobus diversis quadratis.

Invenire alio modo quadratum numerum, qui duobus quadratis numeris equatur; adiaceant IIII^{or} numeri proportionales *a*, *b*, *g*, *d* (1), ut *a* quidem ad *b*, ita *g* ad *d*, et conpositus ex quadratis numerorum *a b* esto *e*, numerorum quoque *g d* esto *z*, et multiplicetur *e* in *z* et proveniet *f f*, dico quoniam *c f* est quadratus, et equalis coniuncto ex duobus quadratis, quod sic probatur. Ex *a* quidem in *g* proveniat *t k*, et ex *b* in *d* provenit *k l*, et ex *a* in *d* proveniat *m n*, et ex *b* in *g* proveniat *n o*, dico primum quod numerus *m n* numero *n o* est equalis, sunt enim proportionales numeri *a*, *b*, *g*, *d* in ea, quam habet *a* ad *b*, proportione. Quare multiplicatio ex *a* in *d* equatur multiplicationi ex *g* in *b*, hoc est numerus *m n* numero *n o*, reliquos vero duos numeros inequales esse demonstrabo, scilicet *k t* et *k l*, quare est sicut *a* ad *b*, ita *g* ad *d*, per equale ergo erit ut *a* ad *g* ita *b* ad *d*.

(1) Vedi Fig. 19.

in se, ergo quadrati qui fiunt a numeris *m n* et *n o* superhabundant duplum superficiei *m n* in *n o*, hoc est *t k* in *k l* in quadrato numeri *q o*, sed duplum multiplicationis *t k* in *k l* cum quadrato, qui fit a numero *q o*, equatur duobus quadratis, qui fiunt a numeris *m n n o*. Quare quadrati, qui fiunt a numeris *t l* et *q o*, equantur quatuor quadratis, qui fiunt a numeris *t k*, *k l*, *m n*, *n o*, hoc est numero *c f*, quod opportebat ostendere.

Ex hoc quidem manifestum est, quod quando duo numeri inequales proponuntur, duplum multiplicationis unius in alium, cum quadrato numeri in quo maior numerus superhabundat minorem, equatur quadratis qui fiunt ab
pl. 21 recto ipsis numeris. Quare multiplicatio | *t k* in *k l*, hoc est *m n* in *n o*, cum quadrato qui fit a numero *p l*, equatur quatratis qui fiunt a numeris *t k*, *k l*. Quare si comuniter addantur duo quadrati, qui fiunt a numeris *m n*, *n o*, erunt duplum superficiei, que est ex *m n*, in *n o*, cum tribus quadratis, qui fiunt a numeris *p l*, *m n*, *n o*, equales IIII.^{or} quadratis, qui fiunt a numeris *t k*, *k l*, *m n*, *n o*, hoc est numero *c f*, sed duplo superficiei, que est ex *m n* in *n o*, ex duobus quadratis, qui sunt ex *m n*, *n o*, equalis est quadratus, qui fit a numero *m o*, ergo duo quadrati, qui fiunt a numeris *m o* et *p l*, equantur numero *c f*, ut opportebat ostendere.

Sed sit unus ex numeris *e z* quadratus, et primo numerus *e*, dico esse possibile invenire alios duos quadratos numeros, qui equantur numero *c f*, quorum unus est ipse, qui egreditur ex multiplicatione numeri *e* in quadratum, qui fit a numero *g*, et alius egreditur ex ductu *e* in eum, qui fit a numero *d*, quoniam quadratus est numerus *e*, si

Digitized by Google

cationis *t k* in *l k*. Quare restat demonstrandum quod duplum multiplicationis *t k* in *k l*, cum quadrato qui fit a numero *q o*, faciant equalem duobus reliquis quadratis, eis videlicet qui fiunt a numeris *m n*, *n o*, ostendam primum quod *t k* in *k l* equatur *m n* in *n o*, est enim *t k* id quod fit ex *a* in *g*, et *k l* est factus ex *b* in *g*, ergo multiplicatio *t k* in *k l* egreditur ex multiplicatione *a* in *g*, ducta in multiplicationem ex *b* in *d*. Similiter multiplicatio *m n* in *n o*, surgit ex multiplicatione *a* in *d*, ducta in multiplicationem *b* in *g*. Quare *m n* in *n o* est sicut *t k* in *k l*, ergo opportet demonstrare duplum *m n* in *n o*, cum quadrato qui fit a numero *q o* equalem esse quadratis, qui fiunt a numeris *m n* et *n o*; est enim *n q* equalis *n m*, quare quadratus, qui fit a numero *m n*, equatur multiplicationi *m n* in *n q*, est enim plus *m n* in *n o*, quam *m n* in *n q*, secundum illud quod est ex *m n* in *q o*, ergo superficies *m n* in *n o* superhabundat quadratum, qui fit a numero *m n* in superficie *q o* in *m n*, hoc est *q o* in *q n*, et quoniam numero *m n* equalis est numerus *q n*, comunis adiaceat *q o*, erit ergo totus *n o* equalis numeris *m n* et *q o*. Quare quadratus, qui fit a numero *n o*, equatur duabus multiplicationibus, que fiunt a numero *o n* in *n m*, et ab *o n* in *o q*, ergo quadratus qui fit a numero *n o* superhabundat superficiem *o n* in *n m*, in superficie *q o* in *o n*. Sed superficies *m n* in *n o* superhabundat quadratum, qui fit a numero *m n*, in superficie *n q* in *q o*, sed quadratus qui fit a numero *n o* superhabundat eandem superficiem *m n* in *n o*, in hoc quod fit ex *n o* in *o q*, sed superficies *n o*, *q o* superhabundat superficiem *o q*, *q n* in id quod fit a numero *q o*

Digitized by Google

qui fit a numero *d*. Sit ergo *c h* (1) id quod egreditur a multiplicatione quadrati, qui fit ab *a*, in quadratum qui fit a numero *g*, erunt ergo *h i* id quod egreditur a multiplicatione quadrati qui fit a numero *a* in eum qui fit a numero *d*. Item *i r* sit multiplicatio eius, qui fit a numero *b*, in eum, qui fit a numero *g*, remanebit ergo *r f* illud quod fit ex ductu quadrati, qui fit a numero *b*, in eum qui fit a numero *d*; divisus est ergo totus numerus *c f* in IIII^or numeris, qui sunt *c h*, *h i*, *i r*, *r f*, et est quadratus unusquisque eorum, cum factus sit ex multiplicatione quadrati numeri in quadratum numerum, quorum radices esse ostendam *t k*, *k l*, *m n*, *n o*; primum quidem ostendam quadratum, qui fit a numero *t k*, equalem esse numero *c h*, est enim *c h* factus ex multiplicatione quadrati, qui fit a numero *a*, in quadratum qui fit a numero *g*. Sed *t k* factus est ex multiplicatione *a* in *g*, quare quadratus, qui fit a numero *t k*, equatur quadrato qui fit ab eo ex *g*. Similiter ostendetur quadratum qui fit ex *a*, in eum qui fit ex *d*, equari quadrato qui fit a numero *m n*, idest equari numero *h i*, et quadratum qui fit a numero *k l* numero *r f*, et adhuc quadratus, qui fit a numero *n o*, equatur numero *i r*, demonstrandum quidem restat duos quadratos, qui fiunt a numeris *t l* et *q o*, vel fiunt a numeris *m o* et *p l*, equales esse IIII^or quadratis, qui fiunt a numeris *t k*, *k l*,
fol. 22 verso *m n*, *n o*, quibus ostendam primum equales esse illi, | qui fiunt a numeris *t l* et *q o*, quadratus quidem, qui fit a numero *t l*, equatur duobus ex predictis quatuor quadratis, eis qui fiunt a numeris *t k*, *k l* et duplo multipli-

(1) Vedi Fig. 18.

quadratorum ex numeris *a b* numerus est *e*, conpositus quidem ex quadratis | numerorum *g d* esto *z*, et multiplicetur *e* per *z*, egrediatur numerus *f*, et non sit quadratus aliquis numerorum *e z*, dico quod numerus *c f* equatur duobus quadratis, duobus numeris, prius etiam duobus modis multiplicatur *a* per *g*, et egrediatur numerus *t k* (1), et ex *b* in *d* egrediatur *k l*, ex *a* in *d* egrediatur *m n* (2), et ex *b* in *g* egrediatur *n o*; et quoniam numeri *a*, *b*, *g*, *d* proportionales non sunt, et est minor *a* quam *b*, et *g* quam *d*, multiplicationes supradictas inequales esse necesse est, et est minor *t k* quam *k l*, ex *k l* summatur *k p* equalis *t k*. Similiter numerum *m n*, *n o* sit maior *n o* quam *m n*, et adiaceat *n q* equalis *m n*, dico quod numerus *c f* equatur coniunctioni quadratorum qui fiunt a numeris *t l* et *q o*, et a numeris *m o* et *p l*, quoniam ex ductu *e* in *z* provenit *c f*, et est *e* summa duorum quadratorum qui fiunt a numeris *a b*, ergo *c f* provenit ex multiplicatione quadrati qui fit *a* numero *a* in *z*, et a numero *b* in *z*. Sit ergo *c i* id quod egreditur ex multiplicatione eius qui fit ab *a* in se, scilicet quadrati ipsius *a* in *z*, remanebit ergo *i f* pro numero qui fit ex ductu quadrati numeri *b* in *z*, sed *z* est coniunctio quadratorum qui fiunt a numeris *g d*, quare multiplicatio quadrati, qui fit a numero *a* in *z* (3), equatur multiplicationibus duabus, videlicet quadrati qui fit ab *a* in quadrato qui fit a numero *g*, et in quadratum

fol. 22 recto

(1) Vedi Fig. 15.
(2) Vedi Fig. 16.
(3) Vedi Fig. 17.

in $d\ e$, hoc est 13 per 15, et divides summam per $d\ z$, hoc est per 17, exibit numerus $t\ k\ \frac{3}{17}\ 11$. Similiter si multiplicaveris $z\ t$ per $z\ e$, et diviseris per $z\ d$, exibit $k\ z\ \frac{3}{17}\ 6$; et sic invencti sunt duo numeri, scilicet $t\ k$ et $k\ z$, quorum quadrati coniuncti faciunt numerum g, hoc est quadratum qui fit a $z\ t$. Similiter ostendetur si numerus $d\ z$ fuerit minor i, ut in alia figura (1), in qua ponemus ut sit $d\ e\ 4$, et $e\ z\ 3$, quare $d\ z$ est 5; et protracta est $z\ d$ in l, et est $z\ l$ equalis i, scilicet 13, et est sicut $z\ d$ ad $z\ l$, ita $d\ e$ ad $l\ m$. Quare multiplicabis $z\ l$ in $d\ e$, et divides per $z\ d$, exibit $l\ m\ \frac{3}{5}\ 10$. Similiter divisa multiplicatione ex $z\ l$ in $z\ e$ per $z\ d$, scilicet 39 per 5, exibit $m\ z\ \frac{4}{5}\ 7$; et sic invencti sunt alii duo numeri facientes conpositum ex quadratis ipsorum 169, qui sunt $\frac{3}{5}\ 10$ et $\frac{4}{5}\ 7$; et sic ostenditur hoc posse fieri in infinitis modis.

Si quatuor numeri non proportionales proponuntur, et sit primus minor secundo, et tertius minor quarto, et aggregatus ex quadratis primi et secundi multiplicetur per aggregatum quadratorum tertii et quarti, et neuter ex aggregatis quadratis quadratus fuerit, egredietur numerus qui duobus modis equabitur duobus quadratis numeris; et si unus tantum ex aggregatis fuerit quadratus, tunc equabitur egressus numerus duobus quadratis tripliciter, et si ambo compositi quadrati fuerint, tunc egressus equabitur duobus quadratis quadrupliciter, et hec intelligantur sine fractione. Sint IIII^{or} numeri non proportionales a, b, g, d, et sit autem a minor b, et g minor d, et si conpositus

(1) Vedi Fig. 14.

est nota, raziocinate enim sunt ambe, quare et proportio *d e*, ad *t k* erit similiter nota. Et cum *d e* sit raziocinata, quare erit et recta *t k* etiam numerata. Similiter ostenditur rectam *z k* esse ratiocinatam, cum proportio eius sit ad *z e* sicut *z t* ad *z d*, numerati ergo sunt *t k* et *k z*, quorum quadrati insimul coniuncti faciunt quadratum qui fit a recta *t z*. Sed quamvis quadratus qui fit a numero *t z*, equalis est ei qui fit a numero *i*, radix enim est numeri *g*, ergo quadratus qui fit a *t z*, equalis est numero *g*; inventi sunt enim duo numeri *t k* et *k z*, quorum quadrati insimul coniuncti faciunt equale quadrato numero *g*. Rursus sit minor *d z* quam *i*, et pro | trahatur *z d* usque ad *l*, ut sit *z l* equa- fol. 21 verso
lis numero *i*. Similiter protrahetur *z e* in *m*, et copuletur *l m*, et sit equidistans *l m* recte *d e*, quoniam similis est triangulus *d e z* triangulo *l m z*, et est nota proportio *z d* ad *z l*, erunt ergo noti numeri *z m* et *m l*; inventi ergo sunt duo numeri *l m* et *m z*, quorum quadrati coniuncti faciunt quadratum equalem numero *g*, cum *l z* sit equalis radici eius, quod opportebat facere.

Et ut hec numeris habeantur, sit *a* 5 et *b* 12 (1), quare *g* qui est coniunctum ex quadratis numerorum *a b* 169, et eius radix, scilicet *i*, est 13, et adiaceant due linee *d e*, et *e z* angulum rectum continentes, qui est *d e z*, et sit recta *d e* 15, et *z* 8, quare *d z* erunt 17, et sumpta est in recta *d z* recta *z t* equalis *i*, est ergo *z t* 13, et producta est recta *t k* equidistans recte *d e*, quare est sicut *z d* ad *z t*, ita *d e* ad *t k*; multiplicabis ergo *z t*

(1) Vedi Fig. 13.

numeris *t k* et *k l*, et duplo superficiei ex *l k* in *k l*. Sed superius demonstravimus superficiem, que fit ex *t k* in *k l*, equalem esse superficiei, que fit ex *m n*, in *n o*. Sed superficies, que fit ex *m n* in *n o*, est ex equalibus numeris, quare *m n* in *n o* est sicut *m n* in se, vel sicut *n o* in se. Quare duplum ex ductu *t k* in *k l* equatur duobus quadratis, qui fiunt de numeris *m n*, *n o*, quare demonstratum est quadratum, qui fit a numero *t l*, equalem esse eis, qui fiunt a numeris *t k*, *k l*, *m n*, *n o*, hoc est numero *c f*, ut opportebat ostendere.

Sed quoniam minor est *t k* numero *k l*, accipiatur ex *l k* numerus *k p* equalis numero *t k*, et, ut superius diximus, invenientur quadrati, qui fiunt a numeris *m o* et *p l*, equari numero *c f*. f numeri

Possunt etiam duo quadrati inveniri, quorum aggregatio erit quadratus numerus, per quoslibet duos numeros datos. Verbi gratia dentur duo numeri *a* et *b*, prout libuerit, sit tamen *b* maior, et auferatur a quadrato numeri *b* quadratus | numeri *a*, et residuum erit radix unius quadratorum inveniendorum, deinde accipiatur duplum eius, quod provenit ex ductu *a* in *b*, quod erit etiam radix alterius quadrati, quod probatur per precedentem proximam demonstrationem sic. Ponam quod sit proportio *g* ad *d*, sicut *a* ad *b*, et sit *g* equalis *a*, et *d* equalis *b*, et erit id quod fit ex *a* in se equale ei, quod fit ex *a* in *g*, et fuit id *t k*, et illud, quod fit a *b*, equale ei quod fit a *b* in *d*, scilicet *k l*, unde si auferatur *t k* ex *k l*, hoc est *k p*, remanebit *p l*, que est una ex radicibus. Item duplum superficiei *a* in *b* equabitur eis, que fiunt ex *a* in *d* et ex *g* in *b*, scilicet numero *m o*, qui est alia radix. fol. 24 recto

Digitized by Google

Invenire duos numeros, quorum quadrati insimul iuncti faciant numerum non quadratum, factum ex compositione duorum quadratorum factorum ex numeris datis.

Sunt duo dati numeri g d, quorum quadrati simul coniuncti faciant numerum z non quadratum, volo duos alios numeros invenire, quorum quadrati insimul iniuncti faciant numerum z. Adiaceant duo numeri a et b (1), quorum quadrati coniuncti faciant numerum e quadratum, non sit sicut g ad d ita a ad b, et multiplicetur e per z, egrediatur numerus i, et inveniantur duo numeri, quorum quadrati insimul coniunti faciant numerum i, sint que p q, in quorum mensura ponatur recte k l, l m, facientes angulum rectum, ipsum scilicet qui sub k l m coniuletur k m. Erit ergo k m radix numeri i, et accipiatur ex k m recta m n equalis radici numeri z, et protrahatur secundum rectum angulum linea n o et o m, sunt recte rationales facientes conpositum ex quadratis ipsorum equalem numeri z. Quoniam quidem quadratus recte k m est equalis numero i, et numerus i est factus ex e in g, ergo si multiplicaverimus radicem numeri i per radicem numeri z, habebitur radix numeri i, hoc est m k, et quoniam radix numeri e est rationalis, quotiens unitas est in ipsa radice, totiens radix numeri z, hoc est m n, est in recta m k. Sit ergo f radix numeri e, quare est sicut unitas ad numerum f, ita m n ad m k, et sicut m n est ad n k, ita n o est ad k l, et o m ad m l, per equale ergo unitas ad numerum f, ita n o ad k l, et m o ad m l. Quare si diviserimus k l (2) per numerum f, egredietur

(1) Vedi Fig. 20.
(2) Vedi Fig. 21.

Digitized by Google

numerus *n o* rationalis ; similiter si diviserimus *m l* per *f*. veniet *o m*. Inventi sunt ergo duo numeri *n o* et *o m*, quorum quadrati coniuncti faciunt non quadratum numerum *z*, qui *z* est conpositus ex quadratis numerorum *g d*, quod oportebat ostendere.

Et ut hec in numeris demonstrentur, sit numerus *g* 4, *d* 5, quare conpositus ex quadratis | ipsorum, scilicet *z*, fol. 21 verso est 41, et ex adiacentibus numeris *a* sit 3, et *b* sit 4, quorum quadrati coniuncti faciunt 25, scilicet numerum *e*, multiplicatio quidem ex *e* in *z*, scilicet de 25 in 41, surgit in 1025, et est possibile invenire duos alios numeros dupliciter, quorum quadrati iuncti faciunt 1025, quorum unus est 32, alter 1, vel unus est 31, et alius 8; sit ergo *k l* 32, aut 31, et *l m* sit 1, vel 8, et accipiatur radix de 25, scilicet numerus *f*, et dividantur per ipsum numeri *k l* et *l m*, et habebimus *n o* et *o m*, videlicet si *k l* est 32, et *l m* est 1, erunt *n o* $\frac{3}{5}$ 6, et *o m* erit tantum $\frac{1}{5}$ unius. Inventi sunt ergo duo numeri, scilicet $\frac{3}{5}$ 6 et $\frac{1}{5}$, quorum quadrati equantur 41, scilicet numero *z*, et si *k l* fuerit 31, et *l m* fuerit 8, erit *n o* $\frac{1}{5}$ 6, et *o m* erit $\frac{3}{5}$ 1, et sic inventi sunt duo alii numeri, quorum quadrati insimul coniuncti faciunt similiter 41, quod oportetebat facere.

Si ab unitate numeri quotcumque continui, pares videlicet et inpares, ordinate disponantur, numerus solidus, qui ab ultimo et a sequente et ab eorum aggregato, equatur sexcuplo summe collectionis omnium quadratorum, qui fiunt ab omnibus numeris, videlicet qui fiunt ab unitate *a b* (1), numeri continui pares et inpares

(1) Vedi Fig. 22.

Digitized by Google

quotcumque ordinate *b g*, *g d*, *e z*, et sit *z i* numerus sequens numerum *e z* in ordine numerorum, hoc est quod sit uno plus eo, dico numerum solidum qui fit a numeris *e z*, *z i*, et *e i*, hoc est id, quod fit ex ductu *e z* in *z i*, et productum in coniunctum ipsorum, scilicet *i e*, equari sexcuplo omnium quadratorum, qui fiunt ab unitate *a b*, et a numeris dispositis *b g*, *g d*, *d e*, *e z*. Accipiatur quidem ex numero *z i* numerus *z t* equalis numero *e z*, remanebit *t i* unum. Item ex *z t* auferatur *k z* equalis numero *d e*, remanebit similiter *k t* unum, in quo superhabundat numerus *e z* numerum *d e*, equalis enim *z t* numero *e z*; erit ergo numerus *k i* duplum unius, scilicet 2. Solidus ergo numerus, qui fit a numeris *e z*, *z k*, et *e k*, equatur solido qui fit a numeris *e z*, *z k*, *k i*, et cum solido qui fit a numeris *e z*, *k i*, *e i* equatur solidus qui fit a numeris *e z*, *z i*, *e i*, demonstrabimus quidem solidos *e z*, *z k*, *k i* et *e z*, F*e i* equales esse sexcuplo quadrati qui fit a numero *e z*. Ponam itaque numerum *e z* radicem, erit ergo *z k* radix, uno diminuto. Quare totus *e i* duabus radicibus et unitati equatur, multiplicatio quidem *e z* in *z k* fol. 23 recto facit quadratum, excepta radice. Mul | tiplicatio quidem unius quadrati, excepta radice, in numerum *k i*, scilicet in duo, facit duos quadratos, duabus radicibus exceptis, ergo solidus qui fit a numeris *e z*, *z k*, *k i* equatur duobus quadratis qui fiunt a numero *e z*, duabus radicibus exceptis. Rursus ex *e z* in *k i* due radices proveniunt, quibus multiplicatis in duas radices et in unum, scilicet in numerum *e i*, faciunt IIII.^{or} quadratos et duas radices, ergo solidum quod fit a numeris *e z*, *k i*, *e i* equatur IIII.^{or} quadratis et duabus radicibus, quorum unusquisque

F*k i*,

Digitized by Google

quadratus fit a numero *e z*. Additis supradictis duobus quadratis, duabus radicibus exceptis, cum IIII.^{or} quadratis et duabus radicibus additis, faciunt sex quadratos, quorum unusquisque fit a numero *e z*, ergo solidum quod fit a numeris *e z*, *z i*, *e i* equatur solido quod fit a numero *e z*, *z k*, *e k* et sexcuplo quadrati qui fit a numero *e z*. Sed solido quod fit a numeris *e z*, *z k*, *e k* equatur solidum *d e*, *e z*, *d z*, ergo solidum quod fit a numeris *e z*, *z i*, *e i* equatur solido quod fit a numeris *d e*, *e z*, *d z* et sexcuplo quadrati a numero *e z*. Similiter ostenditur solidum quod fit a numeris *d e*, *e z*, *d z* equale esse solido quod fit a numeris *q d*, *d e*, *g e*, et sexcuplo quadrati qui fit a numero *d e*, ergo solidum quod fit a numeris *e z*, *z i*, *e i* equatur solido quod fit a numeris *d g*, *d e*, *g e*, et sexcuplo quadratorum qui fiunt a numeris *d e*, *e z*, ostenditur solidum rursus quod fit a numeris ~~*d g*~~, *d e*, *g e* equale esse solido quod fit a numeris *b g*, *g d*, *b d*, et sexcuplo quadrati qui fit a numero *g d*. Ergo solidum quod fit a numeris *e z*, *z i*, *e i* equatur solido quod fit a numeris *b g*, *g d*, *d b* et sexcuplo quadratorum qui fiunt a numeris *g d*, *d e*, *e z*. Similiter, supradictis dispositis, ostendetur solidum, quod fit a numeris *b g*, *g d*, *b d*, equale esse solido, quod fit ab unitate *a b*, et a numeris *b g*, *a g*, et sexcuplo quadratorum qui fit a numero *b g*. Ergo solidum, quod fit a numeris *e z*, *z i*, *e i*, equatur solido quod fit ab unitate *a b* et numeris *b g*, *a g*, et sexcuplo quadratorum qui fiunt a numeris *b g*, *g d*, *d e*, *e f*. Sed solidum quod fit ab unitate *a b* et a numeris *b g*, *a g* equatur sexcuplo quadrati qui fit ab unitate *a b*; est enim *b g* 2, et *a g* 3, ergo solidum, quod fit a numeris *e z*, *z i*, *e i*, equatur

g 2

Digitized by Google

sexcuplo quadratorum, qui fiunt ab unitate *a b* et a numeris *b g*, *g d*, *d e*, *e z*, quod oportebat ostendere. Est enim alius modus per quem possumus ad idem devenire, qui in sequentibus ostendetur.

Si ab unitate numeri inpares ordinate quotcumque disponantur, solidum, quod fit a maximo eorum et a se-
fol. 25 verso quente inpari et ab eorum conposito, equatur duplo | sexcupli omnium quadratorum, qui fiunt ab unitate et a dispositis numeris. Sint quidem ab unitate *a b* (1) numeri quotcumque dispositi ordinate *b g*, *g d*, *d e*, et sequens inpar esto *e z*, dico quidem solidum quod fit a numeris *d e*, *e z*, et ab eorum conposito *d z* equari duplo sexcupli, hoc est duodecuplo summe quadratorum, qui fiunt ab unitate *a b*, et a dispositis numeris *b g*, *g d*, *d e*. Summatur quidem ex numero *e z* numerus *e i* equalis numero *d e*, erit ergo numerus *i z* duo. Ostendam prius solidum, quod fit a numeris *g d*, *d e*, et eorum conposito *g e*, cum duodecuplo quadrati qui fit a numero *d e*, equale esse solido quod fit a uumeris *d e*, *e z*, *d z*. Sit itaque numerus *d e* radix, erit ergo numerus *g d* radix minus duobus, et totus cum *e* erit due radices minus duobus. Quare ex ductu *g b* in *d e* provenit quadratus, duabus radicibus exceptis, quod totum si ducatur in numerum *g e*, hoc est in duas radices, duabus unitatibus diminutis, provenient duo cubi numeri, et IIII^{or} radices minus quadratis, quibus si addatur duodecuplum quadrati, qui fit a radice *d e*, erunt duo cubi et sex quadrati et IIII^{or} radices. Rursus quoniam *d e* est radix, erit numerus *e i* similiter radix. Quare

(1) Vedi Fig. 23.

Digitized by Google

totus *e z* et radix ex duabus unitatibus additis, que sunt *i z*, et conpositus ex eis *d z*, erunt due radices, et due unitates. Ex ductu quidem *d e* in *e z* provenit quadratus et due radices, ex ductu quidem horum in numerum *d z*, hoc est in duas radices et in duo, proveniunt similiter duo cubi et sex quadrati et IIII^{or} radices. Quare ostensum est solidum quod fit a numeris *g d*, *d e*, *g e*, et duodecuplum quadrati, quod fit a numero *d e*, equale esse solido, quod fit a numeris *d e*, *e z*, *d z*. Eodemque modo ostendetur solidum, quod fit a numeris *b g*, *g d*, *b d*, cum duodecuplo quadrati, qui fit a numero *g d*, equari solido, quod fit a numeris *g d*, *d e*, *g e*, ergo solidum, quod fit a numeris *d e*, *e z*, *d z*, equatur solido, quod fit à numeris *b g*, *g d*, *b d*, et duodecuplo quadratorum, qui fiunt a numeris *g d*, *d e*. Rursus etiam, supradictis dispositis, ostendetur solidum, quod fit a numeris *b g*, *g d*, *b d*, equale esse solido, quod fit ab unitate *a b*, et numeris *b g*, *a g*, et duodocuplo quadrati, qui fit a numero *b g*. Sed solidum, quod fit ab unitate *a b*, et a numeris *b g* et *a g*, est duodecuplum quadrati, qui fit ab unitate *a b*, ternarius est numerus *b g*, quaternarius quoque numerus *a g*. Ergo solidum, quod fit a numeris *d e*, *e z*, *d z*, equatur duodecuplo omnium quadratorum, qui fiunt a subiacentibus, scilicet ab unitate *a b*, et a numeris *b g*, *g d*, *d e*, quod oportebat ostendere.

Simili quoque modo, si a binario disponantur pares numeri quotcumque per ordinem, invenietur solidum, quod erit ab ultimo eorum, et a sequente, et ab eorum conposito, equari duodecuplo omnium quadratorum, qui fiunt a dispositis paribus numeris. *fol. 26 recto*

Digitized by Google

Eademque via et modo, invenietur rursus si a ternario dispositi fuerint numeri quotcunque ascendentes per ternarium ordinate, solidum, quod fit ab ultimo eorum, et a sequente, et a coniuncto, equari sexcupli triplo omnium quadratorum, qui fiunt ab ipsis numeris ascendentibus per ternarium; et quando ascendunt per binarium, ut fit in paribus, tunc ultimum solidum equatur duplo sexcupli omnium quadratorum adiacentium numerorum, et quando ascendunt per unitatem, ut fit in numeris continuis, tunc suprascriptum solidum equatur simplo sexcupli quadratorum adiacentium numerorum, ut in suprascriptis demonstravimus, que intelligas in quadratis, qui fiunt a numeris qui ascendunt ordinate per quaternarium a IIII^{or}, vel a V^{que} per quinarium, vel per ascensionem reliquorum numerorum.

Si duo numeri primi conponantur ad se invicem, feceritque conpositus ex eis numerum parem, si solidus numerus, qui fit ab ipsis et ab eorum conposito, multiplicetur per numerum in quo maior numerus excedit minorem, egredietur numerus, cuius vigexima quarta pars erit integra. Sint duo numeri *a b* et *b* (1) primi ad se invicem, facientes conpositum ex eis *a g* numerum parem, hòc est quod sint minimi in ipsa proportione, quam habet numerus *a b* ad numerum *b g*, et numerus *b g* maior, et summatur ex numero *b g* numerus *b d* equalis numero *a b*. Erit ergo numerus *d g* id in quo numerus *b g* superhabundat numerum *a b*. Dico quidem quod si numerus *a b* multiplicetur in numerunm *b g*, et quod provenit ducatur in

(1) Vedi Fig. 24

Digitized by Google

a g, et hoc totum producatur in numerum *d g*, egredietur numerus, cuius vigexima quarta pars, hoc est tertia octave, vel quarta sexte partis, erit integra. Numeri quidem *a b* et *b g* ambo inpares sunt, quia si non essent inpares, conpositus ex eis non esset par, nec ambo sunt pares, quia si pares essent, ambo iam non essent primi ad se invicem; ergo inpares sunt numeri *a b* et *b g*. Et quoniam numerus *b d*. equalis est numero *a b*, duplus est ergo numerus *a d* numero *a b*, ergo par est numerus *a d*, ergo reliquus *d g* est par, quia si par numerus auferatur a pari, par remanet, et quia numerus *d g* est par, erit ergo medietas eius, aut par, aut inpar. Esto prius inpar, medietas quidem numeri *a d*, scilicet *a b*, est inpar. Quare addita medietate numeri *a d* cum medietate numeri *d g*, scilicet additis duobus inparibus, inparem facient numerum, ergo medietas numeri *a g* est par, quare totus *a g* est pariter par, unde quarta eius pars erit integra. Quare ex ductu | *a g* in *g d* surgit numerus, cuius fol. 26 verso octava pars est integra. Sed si medietas numeri *g d* par erit, ergo quarta eius integra, quare ex ductu *d g* in *a g* veniet numerus, cuius octava pars erit similiter integra. Quare si quod fit ex ductu *a g* ducatur in *b g*, et hoc totum producatur in *a b*, proveniet numerus, cuius octava pars erit integra. Et quoniam numeri *a b*, *b g* sunt inpares, aut tertia pars unius est integra, aut non. Esto prius integra. Quare ex ductu solidi, quod fit a numeris *a b*, *b g*, *a g* (1), in numerum *d g*, egrediatur numerus *k*, cuius tertia pars est integra, et cuius etiam octava

(1) Vedi Fig. 25.

Digitized by Google

pars inventa est integra, ergo vigexima quarta pars eius erit integra, ut prediximus; et si tertia pars numeri *a b*, vel *b g* non est integra, si unusquisque eorum dividatur per 3, remanebit aut equaliter, aut inequaliter ex utroque. Remanebit primum equaliter, quare numerus *g d* dividitur integraliter per 3, quare ex ductu solidi supradicti in numerum *d g* egreditur numerus, cuius tertia pars est integra. Sed non remaneat equaliter ex numeris *a b*, *b g* cum dividuntur per 3, remanebit ex aliquo ipsorum 1, et ex alio 2, quare ex coniunctione ipsorum, scilicet ex numero *a g*, tertia pars erit integra, unde solidi, qui fiunt a numeris *a b*, *b g*, *a g*, tertia pars eius erit integra. Quare ex ductu ipsius solidi in numerum *d g* egreditur numerus, cuius tertia pars est integra; et quoniam eius octava pars inventa est similiter integra, erit ergo proxima quarta pars eius integra, ut eportebat ostendere. Et hoc idem erit si numeri *a b* et *b g* non fuerint primi ad se invicem.

Et si unus ex numeris *a b*, *b g* fuerit par, coniunctus ex eis erit inpar, tunc ostendetur similiter si solidum, quod fit a duplo uniuscuiusque, et ab eorum coniuncto *a g*, ducatur in numerum *d g*, surgere in numerum, cuius etiam vigexima quarta pars erit integra, sive numeri sint primi inter se, sive non, et factus numerus videlicet, cuius vigexima quarta pars est integra, congruum appellari.

Si circa aliquem numerum adiaceant numeri quotcumque minores et maiores eo, et sit multitudo minorum equalis multitudini maiorum, et quot unusquisque ex maioribus superhabundat ipsum numerum, tot ipse numerus superhabundet minores, erit summa adiacentium

Digitized by Google

ex ductu ipsius numeri in numerum multitudinis ipsorum. Circa numerum *d* adiaceant numeri *a*, *b*, *g*, *e*, *z*, *i* (1), et sit minor eorum numerus *a*, maximus numerus *i*, et quot superhabundat | numerus *i* numerum *d*, tot superhabundat fol. 57 recto numerus *d* numerum *a*. Similiter, quot superhabundat numerus *z* numerum *d*, tot superhabundet numerus *d* numerum *b*, rursus quot superhabundat numerus *e* numerum *d*, tot superhabundat numerus *d* numerum *g*. Dico si ducatur *d* in numerum multitudinis numerorum *a*, *b*, *g*, *e*, *z*, *i*, proveniet summa ipsorum omnium numerorum, quod sic probatur. Minuam quidem ex numero *i* superhabundantiam, quam habet ad numerum *d*, addamque eam numero *a*, erit unusquisque numerorum *a i* equalis numero *d*, quod etiam faciam ex numeris *z b* et *e g*, erit unusquisque eorum equalis numero *d*. Quare quot sunt numeri *a*, *b*, *g*, *e*, *z*, *i*, tot numeri equales numero *d* sunt in summa coniunctionis numerorum *a*, *b*, *g*, *e*, *z*, *i*, quod oportebat ostendere.

Invenire numerum, quo addito super quadratum numerum, et diminuto ab ipso, faciat semper quadratum numerum, et sic oportet tres quadratos et unum numerum invenire, quo numero addito super minorem quadratum faciat quadratum secundum, super quem si addatur idem numerus facit quadratum tertium, hoc est maiorem, et sic addito ipso numero super secundum quadratum, et diminuto ipso ab eodem, facit semper quadratum. Quoniam quadrati numeri omnes ordinate ascendunt per continuam ascensionem inparium numerorum, erit minor qua-

(1) Vedi Fig. 26.

Digitized by Google

dratus summa aliqua inparium numerorum ab unitate acceptorum, super quem quadratum proponatur addere numerum, et fieri quadratum secundum, qui quadratus rursus constat ex aliqua multitudine inparium ab unitate ordinate disposita, super quem etiam secundum quadratum si addatur numerus idem, qui vocetur congruus, quia congruit his, facit maiorem quadratum, qui etiam maior quadratus egreditur ex aliqua multitudine inparium similiter ab unitate accepta, in qua multitudine tota est multitudo inparium facentium primum quadratum, et alia multitudo facentium congruum idem, et alia multitudo facentium eundem idem congruum; quare multitudo inparium facentium maiorem quadratum dividenda est in tres partes predictas. Sed multitudo inparium facentium primum congruum est in aliqua proportione cum multitudine facentium secundum, plures enim numeri inpares sunt in multitudine facentium primum congruum, quam in multitudine facentium secundum, cum minores numeri sint in ipsa propter ordinem numerorum, quia in ipsa sunt antecedentes inpares, et in alia sunt consequentes, unde qualiter congruum inveniatur in aliqua data proportione in qua esse poterunt, ostendere procurabimus. Adiaceant duo quilibet numeri *a b*, *b g* (1), conpositus quidem ex ipsis est *a g*, et sit *b g* | maior quam *a b* secundum quantitatem numeri *d g*. Si numerus quidem *b g* ad numerum *a b* minorem proportionem habuerit quam numerus *a g* ad numerum *d g*, tunc possibile erit invenire congruum ex una multitudine inparium habente proportio-

fol. 27 verso

(1) Vedi Fig 27.

Digitized by Google

nem ad multitudinem sequentium inparium, eam videlicet quam habet numerus $g\ b$ ad numerum $a\ b$, et si maior fuerit proportio numeri $b\ g$ ad numerum $b\ a$, quam numeri $a\ g$ ad numerum $d\ g$, tunc impossibile erit invenire duas multitudines inparium numerorum continuas in proportione quam habet numerus $a\ g$ ad numerum $d\ g$, tunc possibile erit invenire duas multitudines inparium numerorum continuas in proportione quam habet numerus $a\ g$ ad numerum $d\ g$, et ~~ex~~ summa uniuscuiusque multitudinis egreditur congruum. Esto prius proportio, quam habet numerus $b\ g$ ad numerum $a\ b$, minor ea quam habet numerus $a\ g$ ad numerum $d\ g$, oportet ergo invenire duas multitudines inparium inmediate in proportione quam habet numerus $b\ g$ ad numerum $a\ b$, et summa unitatis utriusque multitudinis sit eadem, coniunctio quidem ex numeris $a\ b$, et $b\ g$, scilicet $a\ g$, aut est par, aut inpar. Esto prius par, quare numerus $a\ d$, scilicet duplus ad $a\ b$, par est, unde residuum $d\ g$ parem esse necesse est. Ex ductu quidem $d\ g$, in $b\ g$ proveniat numerus $e\ z$, et ex ductu $d\ g$ in $a\ b$, proveniat $z\ i$, est ergo sicut $g\ b$ ad $b\ a$, ita numerus $e\ z$ ad numerum $z\ i$, et sunt numeri $e\ z$, $z\ i$, pares. Rursus ex ductu $a\ g$ in numeris $g\ b$, et $b\ a$, proveniant pares numeri $k\ m$, $k\ l$, est ergo sicut $g\ b$ ad $b\ a$, ita $k\ m$ ad $k\ l$. Sed sicut $g\ b$ ad $b\ a$, ita $e\ z$ ad $z\ i$, ergo sicut $e\ z$ ad $z\ i$, ita $k\ m$ ad $k\ l$, denique ducatur $e\ z$ in $k\ l$, proveniat $o\ p$, et ex ductu $z\ i$ in $k\ m$, proveniat $p\ q$, et quoniam est sicut $e\ z$ ad $z\ i$, ita $k\ m$ ad $k\ l$, id quod fit ex ductu $e\ z$, in $k\ l$, equale est ei quod fit ex ductu $z\ i$ in $k\ m$, quare equalis est numerus $o\ p$, numero $p\ q$, ostendam utrumque ipsorum esse congruum. Quare ex ductu $e\ z$ in $k\ l$,

+ est

Digitized by Google

provenit *o p*, quot unitates sunt in numero *e z*, tot numeri equales numero *k l*, sunt in numero *o p*, sed quot numeri equales numero *k l* sunt in numero *o p*, tot continui numeri inpares existentes circa numerum *k l* sunt in eodem *o p*, ergo quot unitates sunt in numero *e z*, et tot numeri inpares continui existunt circa numerum *k l*, ita quod medietas eorum sint minores numero *k l*, et alia medietas sint maiores, qui omnes faciunt numerum
fol. 28 recto equalem *o p*. Similiter ostendetur quod quot | unitates sunt in numero *z i*, tot inpares existentes circa numerum *k m* sunt in numero *p q*, ergo sicut numerus *e z* ad *z i*, ita multitudo inparium facientium numerum *o p* est ad multitudinem imparium facientium numerum *p q*, qui ostensus est equalis numero *o p*; dico etiam continuam esse utramque multitudinem, quia ex ductu *a g* in *b g* provenit *k m*, et est *b g* equalis numeris *g d* et *d b*, ergo ex ductu *a g* in numeris *d g* et *d b* provenit *k m*. Sed ex ductu *a g* in *b d*, hoc est in *a b*, provenit *k l*, reliquus ergo *l m* provenit ex *a g* in *d g*, sed ei numero, qui provenit ex *a g* in *d g*, equales sunt numeri qui proveniunt
Ye ex *g d* in *g b* et in *b a*, hoc est numeri ꝗ *z*, *z i*, quare equalis est numerus *l m* numero *e i*. Accipiatur itaque ex numero *l m* numerus *l n* equalis numero *e z*, reliquus
f 21 ergo ꝗ *m* reliquo *z i* est equalis. Item ostendendum est numerum *k l* maiorem esse numero *e z*, quoniam proportio *g b* ad *b a* est minor proportione numeri *a g* ad *g d*, ergo aliquis numerus minor numero *a g* ad numerum *g d* habet eandem proportionem, quam numerus *g b* ad *b a*, sitque numerus *a f*, et quoniam est ut *g b* ad *b a*, ita *a f* ad *d g*, multiplicatio ergo *a f* in *b a* equatur multiplicationi

Digitized by Google

b g in *d g*, hoc est numero *e z*. Sed multiplicatio *a g* in *a b*, hoc est numerus *k l*, maior est multiplicatione *a f* in *a b*, hoc est numero *e z*; accipiatur quidem ex numero *k l* numerus *l h* equalis numero *n l*, hoc est *e z*, erit totus *h n* duplus numero *e z*. Rursus super numerum *k m* addatur numerus *m c* equalis numero *m n*, hoc est *z i*, duplus ergo est *n c* numero *z i*, et quoniam par est numerus *k l*, si auferatur ab eo numerus *l h*, hoc est *c z* qui est par, remanebit numerus *k h* par. Similiter si supra *k l* addatur *l n* erit totus *k n* par, verum et numerus *n c* est par, quare totus *k c* est par. Et quoniam *k h* est par, quot unitates sunt in medietate eius, tot inpares numeri intercidunt ab unitate usque ad numerum *k h*, quorum inparium summa facit quadratum numerum, qui provenit ex multiplicatione medietatis numeri *k h* in se, sit ille quadratus numerus *r o*. Item quot unitates sunt in numero *h n*, tot numeri numerantur ordinate inter numerum *h* et numerum *k n*, quorum multitudo est par cum numerus *h n* sit par, sed dimidium numeri *h n* est *e z*, ergo quot unitates sunt in numero *e z*, tot inpares numeri intercidunt inter numeros *k h* et *h l*, ex quorum multitudine ostensum est provenire numerum *o p*, cum sit circa numerum *k l*, medietates quorum intercidunt inter numeros *k h* et *k l*, et alia medietas | inter *k l* et *k n*, ergo ex omnibus inparibus, qui sunt ab unitate usque in numerum *k n*, provenit *r p*, et est quadratus, cuius radix est medietas numeri *k n*. Rursus quot unitates sunt in numero *n o*, tot numeri intercidunt inter numeros *k n* et *k c*, quorum medietas est ex inparibus numeris, ergo quot unitates sunt in numero *m n*, hoc est in *z i*, tot numeri inpares inter-

1 e

1 e

+ 1 quorum indeter-
dunt

fol. 28 verso

Digitized by Google

cidunt inter numeros *k n* et *k c*, et sunt continui cum inparibus qui sunt inter *k h* et *k n*, ut prediximus. Sed ex numeris inparibus qui sunt inter *k n* et *k c* colligitur numerus *p q*, cum sit circa numerum *k m*, ergo ex omnibus inparibus, qui sunt ab unitate usque in numerum *k c*, provenit numerus *r q*, ergo quadratus est numerus *r q*, et est unusquisque numerorum *o p*, et *p q*, ut prediximus. Inventus quidem numerus est, scilicet *p q*, quo addito super quadratum, scilicet super *r p*, facit quadratum numerum, qui est *r q*, et diminuto ipso, scilicet *p q*, hoc est *o p*, ex eodem quadrato, scilicet ex *r p*, remanet quadratus, scilicet *r o*, quod opportebat facere. Que etiam ut clarius videantur, ponam numerum *a b* 3, numerum quoque *b g* 5, quare totus *a g* erit 8, residuum quoque *d g* erit 2, pares enim sunt numeri *a g* et *d g*, ex ductu quidem *d g* in *b g* provenit 10, et ex ductu *d g* in *a b* provenit 6, ergo *e z* est 10, et *z i* est 6. Est ergo sicut *b g* ad *g a*, ita *e z* ad *z i*, hoc est sicut 5 ad 3, ita 10 ad 6, et 10 est numerus prime multitudinis inparium facentium congruum, et 6 est numerus secunde multidinis facentium idem. Item ex ductu *a g* in *g b* et in *b a*, hoc est ex 8 in 5 et in 3, proveniunt *k m* 40, et *k l* 24, residuum *m l* est 16, que equatur numeris *e z*, *z i*. Addatur quidem super *k l* numerus *l n* equalis numero *e z*, scilicet 10, erit *k n* 34, et super *k m* addatur *n m*, scilicet *z i* qui est 6, erit *k c* 46, et auferatur ex *k l* numerus *h l* equalis *n l*, scilicet 10, remanebit *k h* 14, et ducatur *e z*, hoc est *l n* in *k l*, scilicet 10 in 24, provenit *p o* 240, qui est congruum, et summa decem numerorum inparium existentium circa 24, qui sunt inter numeros *k h* et *k n*, hoc est 14 et 34.

Digitized by Google

Item ex ductu *z i* in *k m*, hoc est de 6 in 40, provenit 240, hoc est *p q*, et summa sex inparium existentium circa 40, qui sunt inter *k n* et *k c*, hoc est inter 34 et 46. Ex numeris quidem inparibus, qui sunt ab uno usque in numerum *k h*, scilicet in 14, provenit 70, et est 49, quia ab uno usque 14 sunt septem numeri inpares, et sunt circa septenarium, quare ex ductu | 7 in 7 provenit fol. 29 recto
summa inparium, qui sunt ab uno usque in 14, ergo *r o* est quadratus. Ex multitudine quidem inparium, qui sunt inter *k h* et *k n*, provenit *o p*, ergo ex multitudine inparium, qui sunt ab uno usque in *k n*, scilicet in 34, provenit numerus *r p*, et sunt illi numeri inpares 17, quorum summa surgit ex ductu 17 in se, ergo *r p* est quadratus, et est 289. Nam addito *r o* cum *o p*, scilicet 49 cum 240, faciunt 289, quorum radix est 17, scilicet dimidium *k n*. Item ex multitudine numerorum, qui sunt inter *k n* et *k c*, provenit numerus *p q*, qui est equalis numero *o p*, est enim 240; ergo ex multitudine inparium, qui sunt ab uno usque in 46, provenit numerus *r q*, et est quadratus, cuius radix est dimidium numeri *k c*, scilicet 23. Nam additi *p q* super *r q*, scilicet 240 cum 289, faciunt 529, quorum radix est 23.

Sed sit proportio *g b* ad *b a* maior proportione *a g* ad *g d*, et sit iterum numerus *a g* par, dico possibile esse invenire duas multitudines inparium continuas facientes congruum in proportione quam habet numerus *a g* ad numerum *g d*. Et ut liquidius appareat sit *a b* 1 (1), et *b g* 3, quare *a g* est 4, et ~~*b g*~~ est 2, et multiplicetur *a g* in

(1) Vedi Fig. 28.

Digitized by Google

a b, proveniat *e z*, et ex *a b* in *d g* proveniat *z i*, est ergo ut *a g* ad *d g*, ita *e z* ad *z i*, et quia *a b* est 1, numeri *e z*, *z i* sunt equales numeris *a g*, *d g*, ergo *e z* est 4, et *z i* est 2. Item ex ductu *b g* in *a g* proveniat *k m*, et ex ductu *b g* in *g d* proveniat *k l*, est ergo *k m* 12, et *k l* est 6, est ergo sicut *e z* ad *z i*, hoc est sicut *a g* ad *d g*, ita *k m* ad *k l*, et ex ductu *e z* in *k l* proveniat *o p*, et ex ductu *z i* in *k m* proveniat *p q*, equales enim sunt *o p* et *p q*, unusquisque eorum est 24. Nam *o p* constat ex IIII.^{or} inparibus, qui sunt circa *k l* 6, hoc est circa *k l*, propter *e z* qui est 4, quibus 4 additis super *k l*, faciat *k n*, ergo *k n* est 10; similiter extractis 4 ex *k l* remaneat *k h*, ergo *k h* est 2. Rursus addito numero *z i*, scilicet 2, super *k m*, faciat *k c*, ergo *k c* est 14, et *n c* est 4, in quibus sunt duo inpares, scilicet 11 et 13, et sunt circa numerum *k m*, scilicet circa 12, qui faciunt numerum *p q*, ergo primus quadratus, scilicet *r o*, est 1, cuius radix est dimidium numerorum *k h*, scilicet 1. Secundus vero quadratus, scilicet *r p*, est 25, cuius radix est dimidium numeri *k n*, quod est 5. Tertius quidem quadratus, scilicet *r q*, est 49, cuius radix est dimidium numeri *k c*, quod est 7. Et not~~andum~~, quia 24 est primum | congruum, cum sit minor numerus, cuius 20^{ms} 4te pars sit integra, et oriatur ex duobus minoribus numeris parem numerum facientibus, scilicet ex uno et 3. Rursus ex numeris *a b* et *b g* coniunctus fit inpar, et auferatur *a b* ex *b g*, et sit residuum eorum numerus *g d*, et sit proportio numeri *g b* ad *b a* minor proportione *a g* ad *g d*. Inveniam rursus duas multitudines continuas inparium in proportione quam habet *g b* ad ~~*b*~~, ex unaquaque multi-

um

fol. 29 verso

Pe

b a

tudine procreabitur congruum unitatum idem; adiaceat itaque numerus *t* duplus numeri *b g*, et numerus *s* duplus numeri *b a*, coniunctus quidem ex numeris *t s* par est, et est *t* ad *s*, sicut *b g* ad *b a*, et ducatur *g d* in numeris *t s*, et proveniant numeri *e z* et *z i*, est ergo sicut *t* ad *s*, hoc est sicut *g b* ad *b a*, ita *e z*, ad *z i*, et ducatur iterum numerus *a g* in numeris *t s*, et proveniant *k m* et *k l*, est ergo ut *t* ad *s*, hoc est ut *e z* ad *z i*, ita *k m* ad *k l;* et quoniam pares sunt numeri *t s*, pares sunt numeri *k m* et *k l*, et ostendetur per premissam ea que dicta sunt in numeris *k h*, *k l*, *l n*, *n m* et *m c*, et in reliquis etiam *r o*, *o p*, *p q*, est ergo congruum *o p*, vel *p q* etc. Quare etiam ostendemus cum numeris. Sit ita ut *b g* 2, et *b a* sit 1, erit *a g* 3, et *g d* 1, et *t* 4, et *s* 2, et *e z* 4, et *z i* 2, et *k m* 12, et *k l* 6, et *h n* 8, et *n c* 4, et *k h* 2, et quadratus *r o* unum congruum *o p*, vel *p q* 24, quare quadratus *r p* est 25, et quadratus *q* 9, que oportebant ostendere.

Et quoniam numeri *b g* et *b a*, scilicet unum et duo, sunt minores qui sint in numeris, et ex coniunctione eorum provenit inpar numerus, et cum ipsis habuimus 24 per congruum, sicuti habuimus superius ex positione ternarii et unitatis, qui sunt minores numeri, qui esse possint, facientium parem numerum, ideo manifestum est 24 esse minus et primum congruum quod cadat in tribus quadratis, qui sint ex integris numeris. Sed cum fractionibus possunt inveniri minores eo, ut in sequentibus demonstrabimus.

Sed sit proportio *g d* ad *b a* maior proportione *a g* ad *g d*, tunc erunt multitudo inparium primi congrui ad

Digitized by Google

multitudinem secundi, sicut *a g* ad *g d*, et sit iterum *a g* inpar. Que ut liquidius demonstrentur, sit *g b* 5, et *b a* 2, erunt ergo *a g* 7, et *d g* 3, duplum quidem ex *g b* est 10, et ex *b a* est 4, et ducatur 4 in numeris *a g* et *g d*, et veniet pro multitudine inparium primi congrui 28, et pro multitudine secundi 12, et multiplica unumquem numero-
fol. 20 recto rum | *a g* et *d g* per duplum *b g*, et habebis 70 pro numero, circa quem sunt 12 inpares numeri facientes secundum congruum, et 30, circa quem erunt 28 inpares facientes primum. Quare extractis 28 de 30 remanent 2, quorum medietas, scilicet 1, est radix primi quadrati; et adde 28 cum 30 erunt 58, cuius medietas, scilicet 29, est radix secundi quadrati. Item adde 12 cum 70 faciunt 82, quorum medietas, scilicet 41, est radix tertii quadrati, et ex ductu 28 in 30, vel 12 in 70, habentur 840 pro congruo. Egreditur autem idem 840 ex aliis duobus adiacentibus numeris, scilicet ex septenario et quinario, quia si solidum, quod fit ab eis, et ab eorum coniuncto, ducatur in binarium, scilicet id in quo 7 excedit 5, provenit 840. Egreditur enim multitudo prima inparium facientium ipsum ex ducto binario in septenarium, quare ipsi inpares numeri sunt 14 (1), et sunt circa 60, qui egreditur ex quinario ducto in 12, multitudo quidem secunda provenit ex binario ducto in quinarium, et est illa multitudo circa 84, qui provenit ex septenario ducto in 12. Nam decies 84, vel sexagesies 14, equantur solido, qui fit a 5 et 7 et 12, ducto in binarium, unde cuiuslibet congrui vigesima quarta pars est integra, ut superius ostensum

(1) Vedi Fig. 29.

Digitized by Google

est 24 primum congruum, quod inveniri potest cum integris quadratis numeris, et ab ipso 24 generantur omnia congrua. Quotiens enim 24 multiplicabitur per quadratum numerum, totiens congruum procreabitur, et erit minor quadratus ex tribus quadratis, quibus congruit ipse ille, per quem multiplicabitur 24. Medius autem quadratus erit numerus, qui procreabitur ex ipso quadrato ducto in 25. Tertius quidem quadratus erit numerus, qui proveniet ex eodem primo quadrato ducto in 49, cuius numeri radix erit numerus factus ex multipli | catione radicis primi quadrati in 7, qui est radix de 49, et erit multitudo prima inparium facientium congruum dupla multitudinis facientium idem. Similiter egredietur congruum, si multiplicabitur 24 per aliquam summam quadratorum, qui faciunt ab ordinatis numeris ab unitate ascendentibus per inpares et pares, vel per inpares tantum, aut per eos qui ascendunt per ternarium, seu per quaternarium, vel per reliquos numeros, quorum quadratorum summas superius invenire docuimus, et erit proportio inparium facientium secundum congruum ad inpares facientium primum, sicut radix ultimi quadrati est ad radicem sequentis quadrati in ordine assumpte collectionis. Verbi gratia summa quadratorum trium inparium numerorum, scilicet unius et novem et XXV, est 35, quibus ductis per 24 faciunt 840, | qui est congruum, provenit fol. 30 verso etiam ex quinario et septenario adiacentibus, quare proportio prime multitudinis ad multitudinem secundam est sicut 7 ad 5, ut superius ostensum est.

Si congruum aliquod cum suis quadratis multiplicetur per aliquem quadratum, numerus factus ex multiplicatione congrui in quadratum congruum erit, reliqui qua-

Digitized by Google

drati erunt congruentes facto congruo. Sit *a b* (1) quadratus, et *b g* sit congruum, et *g d* sit equalis numero *b g*, quadrati ergo erunt numeri *a g* et *a d*; et adiaceat quidem quadratus numerus *e*, dico quod id quod fit ex *e* in congruo *b g* congruum erit, et numeri, qui fient ex *e* in quadratis *a b*, *a g*, *a d*, quadrati erunt congruentes congruo facto ex *e* in *b g*. Ex ductu quidem ex *e* in *a b* proveniat *z i*, et ex ductu *e* in *a g*, proveniat *z t*, et ex *e* in *a d* proveniat *z k*, et quoniam ex *e* quadrato in *a g*, quadratum provenit *z t* quadratus, est ergo *z t*, et est *z t* equalis duobus numeris, qui fiunt ex quadrato *e* in quadratum *a b*. Sed id quod fit a quadrato *e* in quadratum *a b*, est numerus *z i*, reliquus ergo *i t* procreatur ex *e* in congruum *b g*. Et quoniam quadrati sunt numeri *e* et *a b*, factus ex eis quadratus est ergo numerus *z i*. Rursus quoniam ex quadrato *e* in quadratum *a d*, factus est numerus *z k*, quadratus ergo est *z k*, et est equalis duobus numeris, qui fiunt ex ductu *e* in numeris *a g* et *g d*. Sed ex *e* in *a g* factus est quadratus *z t*, reliquus ergo *z k* fit ex *e* in *g d*, et quoniam equalis est numerus *b g* numero *g d*, equalis erit factus ex *e* in *b g* facto ex *e* in *g d*; factus autem ex *e* in *b g* est *i t*, ergo *i t* equalis est numero *t k*. Si super quadratum autem *z t* addatur numerus *t k*, faciet quadratum *z k*, et si a *z t* quadrato auferatur *t k*, hoc est *t i*, remanebit *z i* quadratus, ergo congruum est *i t*, et congruunt ei tres quadrati, qui sunt *z i*, et *z t*, et *z k*, que oportebat ostendere. Similiter ostendetur provenire idem, si aliquod congruum cum

Fed!

E quadratus

E unl

(1) Vedi Fig. 30.

Digitized by Google

suis quadratis dividatur per aliquem quadratum numerum.

Volo invenire congruum cuius quinta pars sit integra, sit unus ex adiacentibus numeris 5, alter sit numerus quadratus, facientes coniunctum ex eis numerum quadratum, et extracto minore ex maiore remaneat quadratus numerus. Erit itaque ille quadratus 4, quo addito cum quinario facit 9, qui est quadratus, et extracto 4 de 5, remanet 1 qui est etiam quadratus; dico ex his numeris adiacentibus egredi congruum, cuius quinta pars erit quadrata, provenit enim congruum ex his numeris, ex ducto 1 in duplo quinarii, quod totum multiplicatur per duplum quaternari, et illud quod egreditur ducitur per novenarium, | hoc est multiplicare superficiem, que fit ab fol. 31 recto
uno in duplo quinarii, in superficie que fit a duplo quaternarii, in 9, hoc est 10 in 72, sed ex ductu quaternarii in novenarium provenit quadratus numerus, cum ambo sint quadrati, et ex ducto duplo quaternarii in 9 facit duplum quadrati, et ex ductu dupli quadrati in duplo quinarii provenit quadruplum quadrati ductum in quinarium. Sed quadruplum quadrati facit quadratum numerum, ergo quadruplum quadrati ductum in 6 facit quincuplum quadrati, et ductu quincuplo dicti quadrati ducto in 1, qui est quadratus, facit iterum quincuplum quadrati, ergo congruum quod fit ab his quinta pars erit quadrata.

Digitized by Google

Hec questio predicta in prologo libri huius.

Volo invenire quadratum, cui addito 5 vel diminuto, faciat quadratum numerum. Adiaceat congruum, cui quinta pars sit quadrata (1), eritque 720, cuius quinta pars est 144, in quo divide quadratos congruentes eidem 720, quorum primus est 961, secundus est 1681, tertius autem est 2401, et est radix primi quadrati 31, secundi 41, tertii 49, exibit pro primo quadrato $\frac{37}{144}$ 6, cuius radix est $\frac{7}{12}$ 2, que provenit ex divisione 31 in radicem de 144, hoc est in 12, et pro secundo, hoc est quesito quadrato, veniet $\frac{37}{144}$ 11, cuius radix est $\frac{5}{12}$ 3, que provenit ex divisione 41 in 12, et pro ultimo quadrato veniet $\frac{37}{144}$ 16, cuius radix est $\frac{1}{12}$ 4.

Si duo quadrati numeri conponantur facientes compositum ex his parem numerum, proportio conpositi ad residuum, in quo maior excedit minorem, non erit eadem quam habet maior numerus ad minorem. Adiaceant duo numeri *a b* et *b g* (2), et sit *g d* id in quo maior *g b* excedit minorem *b a*, et sit par numerus *a g*, dico non esse ut *g b* ad *b a*, ita *a g* ad *g d*, sed si possibile est, esto *a g* ad *g d*, sicut *g b* ad *b a*, erit ergo *d* superficies que fit ex *b g* in *g d*, equalis superficiei, que fit ex *a g* in *b a*. Sit ergo *z e* numerus superficialis, qui fit ex *b g* in *g d*, et numerus *k l* proveniat ex *a g* in *b a*, equalis

(1) Vedi Fig. 31.
(2) Vedi Fig. 32.

Digitized by Google

est ergo numerus *z e* numero *k l*, ex ductu autem *z e* in *h l* proveniat *o p*, numerus ergo *o p* equalis est numero qui fit ex ductu *b a* in *g d* in ductum *a g* in *b g*. Sit ergo ductus *a b* in *g d* numerus *z i*, et ductus *a g* in *b g* esto *k m*, maior est enim *k m* quam *k l*, cum maior sit numerus *g b* quam *b a*, ergo *o p* equalis est numero qui fit ex *z i* in *k m*, esto itaque numerus *p q* factus ex *z i* in *k m*, ergo numerus *o p* equalis est numero *p q*, sed *o p* quadratus est, cum sit factus a duobus equalibus numeris, sunt *e z*, *k l*, | ergo *p q* quadratus est. Ostensum est superius in primo congruo inveniendo numerum *l m* equalem esse numero *e i*, maior est enim *e i* quam *e z*, ergo maior est *l m* quam *e z*, accipiatur ergo ex numero *l m* numerus *l n* equalis numero *e z*, hoc est numero *k l*, reliquus *n m* equalis est numero *z i*. Addatur itaque super *k m* numerus *m c* equalis numero *m n*, et quoniam *k n* duplus est numero *k l*, par erit *k n*. Ex multitudine quidem inparium qui sunt ab uno usque in *k n* provenit quadratus *o p*, sunt enim circa numerum *k l*, quare *k l* est radix numeri *o p*. Rursus quoniam ex *z i* in *k m* provenit quadratus *p q*, sed quot unitates sunt in numero *z i*, tot inpares numeri sunt inter numerum *k n* et numerum *k c*, duplus est enim *n c* numero *z i*, ergo quadratus *p q* constat ex inparibus qui sunt inter *k n* et *k m*. Ergo duo quadrati *o p* et *p q* constant ex omnibus inparibus qui sunt ab unitate usque in numerum *k c*, ergo numerus *o q* quadratus est, et est duplus quadrati *o p*, proportio ergo quadrati *o q* ad quadratum, *o p* est sicut 2 ad 1, hoc est sicut numeri non quadrati ad numerum quadratum, quod est inconveniens. Non ergo proportio coniuncti

Digitized by Google

a g ad residuum *d g* est sicut *g b* ad *b a*, quod oportebat ostendere.

Hoc idem demonstraretur si numerus *a g* esset inpar, quia que proportio est numeri *b g* ad *b a*, eadem dupli *g* ad duplum *b a*, unde numerus *e z* ostenderetur equalis numero *k l* etc. Ex hoc enim ostendetur quod nullus quadratus numerus potest esse congruum, quia si possibile esset, et iam esset proportio coniuncti duorum adiacentium numerorum ad residuum, sicut maior eorum ad minorem. Quare subintelligitur multos numeros esse qui congruum esse non possunt, sed omnis numerus potest esse congruum, si ex divisione alicuius congrui per ipsum proveniat numerus quadratus, vel si ipse fuerit unus ex IIII^{or} adiacentibus, et reliqui tres fiant quadrati, ut si ponamus 9 et 16, qui sunt quadrati, et coniunctus ex eis, scilicet 25, est quadratus, et auferatur 9 de 16, remanent 7, qui 7 potest esse congruum, multiplicatio quidem dupli de 9 in duplum de 16 facit quadratum numerum, scilicet 576, qui si multiplicetur per 25 faciet iterum quadratum numerum, qui si ducatur per 7 faciet congruum, ergo 7ma eius pars er quadrata.

Volo invenire numerum quadratum, cui addita radice ipsius faciat quadratum numerum, et si ipsa radix auferatur ab eo, remaneat similiter numerus quadratus. Adiaceat congruum similiter cum suis tribus quadratis, qui sunt numeri *a b*, *g d*, *a d* (1). Quare congruum erit numerus *b g*, et *g d*, et dividatur unusquisque quadrato-
fol. 32 recto rum | *a b*, *a g*, *a d* per congruum *b g*, et proveniant

(1) Vedi Fig. 33.

Digitized by Google

numeri *a z*, *z i*, *e h*, et constituatur super *e i* tetragonum *e k*, et conpleatur superficies *l h*, et a puncto *z* equidistans rectis *i k* et *e l* protrahatur recta *z t*, et quoniam numerus *e z* provenit ex divisione numeri *a b* per *b g*, et numerus *e i* provenit ex divisione numeri *a g* in congruum *b g*, numerus quidem *z i* provenit ex divisione *b g* in se, ergo *z i*, *e i* similiter, quia diviso *a d* per congruum *g d*, hoc est per *b g*, provenit numerus *e h*, et ex divisione *a g* in *g d* provenit *e i*, ergo *i h* provenit ex divisione *g d* in se. Quare *i h* est similiter 1, equalis est ergo *h i* recte *i z*, et quoniam super rectam *e i* constitutum est tetragonum *e k*, et *k i* est 1, superficies itaque *k h*, vel *k z*, est radix tetragoni *e k*. Ergo super tetragonum *e k* addatur eius radix, scilicet superficies *k h*, proveniet superficies *l h*, et si ex quadrato *e k* aufferatur eius radix, que est *k z*, remanebit superficies *z l*; et quoniam ex divisione numerorum *a b* et *a g* et *a d* in aliquem numerum, scilicet in *b g*, provenerunt numeri *e z*, *e i*, *e h*, est ergo sicut *a b* ad *a g*, ita *e z* ad *e i*, sunt enim quadrati numeri *a b* et *a g*, ergo proportio numeri *e z* ad *e i* est sicut proportio quadrati numeri ad quadratum numerum. Quare ex ductu *e z* in *e i* proveniet quadratus numerus, sed *e i* recte equalis est recta *z t*, cum sit equalis recte *i k*, tetragonum enim est superficies *e k*, ergo superfices *e t* est quadratus numerus. Similiter, quoniam proportio *e i* ad *e h*, hoc est *l e* ad *e h*, est sicut quadratus numerus ad quadratum numerum, factus quidem ex numeris *e h*, *l e* quadratus erit, hoc est superficies *l h*. Invenctus est enim quadratus numerus *e k*, cui addita radice, que est *k h*, provenit quadratus numerus *l h*, et si ex quadrato

Digitized by Google

e k auferatur eius radix, remanebit quadratus numerus *e t*, quod oportebat ~~ostendere~~.

Similiter si oportuerit invenire quadratum numerum, cui additis duabus radicibus, vel diminutis ab eo, fiat semper quadratus numerus, dividantur tunc adiacentes quadrati *a b*, *a g*, *a d*, per dimidium congrui *b g*, et proveniant numeri *e z*, *e i*, *e h*, erit numerus *z i* 2, cui equabitur numerus *i h*, quare unaqueque superficierum *k h* et *k z* erit equalis duabus radicibus quadrati numeri *k*, et erit similiter proportio *e z* ad *z t* sicut quadrati *a b* ad quadratum *a g*. Quare numerus qui fit ex *e z* in *z t*, hoc est superficies *e t*, quadratus est, propter eandem et superficies, scilicet numerus *l h*, est quadratus. Inventus est ergo quadratus *e k*, cui additis duabus radicibus, scilicet *k h*, provenit quadratus numerus *l h*, et demptis ab eodem *e k* duabus radicibus, scilicet *k z*, remanet quadratus *z l*; hoc idem intelligatur | de tribus, vel pluribus radicibus additis, vel diminutis.

Et ut hec in numeris habeantur, quadratus *a b* sit 1, et quadratus *a g* sit 25, quadratus quoque *a d* sit 49, ~~exierit~~ ergo congruum *b g*, vel *g d* 24, in quo dividantur 1 et 25 et 49, proveniet *e z* $\frac{1}{24}$, et *e i* erit $\frac{1}{24}$ 1, numerus quoque *e h* erit $\frac{1}{24}$ 2, ex ductu quidem *e i* in se provenit quadratus *e k*, quod est $\frac{1}{5}$ $\frac{25}{576}$, cui si addatur id quod fit ex *k i* in *i h*, scilicet $\frac{1}{24}$ 1, proveniet $\frac{13}{5}$ $\frac{35}{576}$, cuius radix est $\frac{35}{24}$, hoc est $\frac{11}{24}$ 1; similiter si auferatur $\frac{1}{24}$ 1, hoc est $\frac{600}{576}$, ex $\frac{825}{576}$, hoc est numerus *k z* ex numero *k e*, remanebit pro superficie *e t* $\frac{35}{576}$, quorum radix est $\frac{5}{24}$, et si super quadratum aliquem proponatur addi et diminui duas radices, duplicabis quidem numeris *e z*, *e i*, *e h*, provenient $\frac{1}{12}$

et $\frac{1}{17}$ 2 et $\frac{1}{17}$ 4, qui etiam proveniet si dividatur 1 et 25 et 49 per dimidium congruum, scilicet per 12, et sic radix quesiti quadrati erit $\frac{1}{17}$ 2, et sic intelligas de tribus, vel pluribus radicibus additis et diminutis.

Omnium trium quadratorum, qui sunt continui inpares, maior quadratus addit super medium octo plus quam medius super minorem. Adiaceant tres radices *a b*, *b g*, *g d* (1) trium datorum quadratorum, qui sunt inpares et continui, et sit radix *a b* minor quam *b g*, et *b g* minor quam *d g*, dico quadratum, qui fit *a* numero *g d*, addere octo plus super quadratum, qui fit *a* numero *b g*, quam addat quadratus qui fit a numero *d g* super quadratum qui fit a numero *a b*. Quare numeri *a b*, *b g*, *g d*, sunt radices trium continuorum quadratorum inparium, inpares quidem sunt et continui. Quare *b g* superhabundat *a b* in duobus, et in tot superhabundat numerus *d g* numerum *b g*, auferantur ergo duo a numero *b g*, remaneatque ex eo numerus *b*; propter eandem si a numero *g d* auferantur duo, scilicet numerus *c d*, remanebit *g c* equalis numero *b g*. Rursus si a numero *e g* auferatur numerus *g f* equalis utrique numerorum *a b*, *b e*, remanebunt duo pro numero *f c*, quare totus *f d* est 4. Et quoniam numerus *g e* est id in quo numerus *b g* superhabundat numerum *a b*, et est *e g* duo, addit ergo quadratus, qui fit a numero *b g*, super quadratum, qui fit a numero *a b*, duplum numerorum *a b*, *b g*, hoc est numeri *a g*. Similiter et quadratus, qui fit a numero *g d*, addit super quadratum *b g* duplum numerorum *b g*,

(1) Vedi Fig. 34.

Digitized by Google

g d, ergo quot excedit duplum numerorum *b g*, *g d* duplum numerorum *a b*, *b g*, tot excedit numerus qui est inter quadratos, qui fiunt a numeris *g f*, *g d*, numerum qui est inter quadratos, qui fiunt a numeris *g b*, *b a*, comuniter auferatur duplum numeri *b g*, quot | ergo suprahabundat duplum numeri *g d* duplum numeri *a b*, tot superhabundat numerus qui est inter quadratos, qui fiunt a numeris *d g*, *g b*, numerum qui est inter quadratos qui fiunt a numeris *g b*, *b a*. Sed duplum numeri *a b* est sicut duplum numeri *g f*, ergo duplum numeri *g d* superhabundat duplum numeri *a b*, hoc est duplum numeri *g f* in duplo numeri *f d*. Sed duplum numeri *f d* est octo, quaternarius est enim *f d*, ergo quadratus, qui fit a numero *g d*, addit octo super quadratum, qui fit a numero *b g*, plusquam addat quadratus qui fit a numero *b g* super quadratum qui fit a numero *b a*, ut oportebat ostendere.

Et quoniam secundus quadratus inpar, scilicet 9, addit unum octonarium super primum quadratum inparem, scilicet super 1, invenietur ex his tertium quadratum inparem, scilicet 25, addere duos octonarios super secundum quadratum inparem, et sic semper invenietur ordinata ascensio quadratorum inparium ascendere per ascensionem numerorum qui ascendunt per octonarium, hoc idem accidit in quadratis parium numerorum preter ascensionem secundi quadrati paris, scilicet 16, qui addit 12 super primum quadratum parem, scilicet super 4; deinde pares quadrati ascendunt per octonarios in infinitum numerando supra 12, vel secundus quadratus par addit super primum quadratum parem ~~ter~~ quaternarios,

Digitized by Google

et tertius super secundum addit quinque quaternarios, et quartus super tertium septem quaternarios, et quintus super quartum novem, et sic semper adduntur duo quaternarii per ascensionem inparium numerorum usque in infinitum. Secundnm hanc proportionem, vel primus quadratus parium, scilicet 4, constat ex uno quaternario. Secundus super primum addit tres quaternarios, tertius super secundum quinque, et sic invenitur pares quadratos ascendere per ascensionem quaternariorum qui ascendunt per ternarium ordinate, ascendere per ascensionem novenariorum qui ascendunt similiter per inpares numeros. Verbi gratia quadratus ternarii est semel 9, sexnarii addit super primum tres novenarios, cum sit 36, super quem quadratus novenarii addit quinque novenarios. Sequens vero, scilicet quadratus duodenarii, addit 7 novenarios super quadratum novenarii, et sic deinceps. Illud idem ~~i~~uveni ex ascensione quadratorum, qui sunt a numeris ascendentibus per quaternarium, et per alios numeros in infinitum, ex quibus omnibus collegi solutiones quarundam sequentium questionum. L-in

Volo invenire in data proportione duas differentias trium quadratorum. Esto data proportio numeri *a* ad numerum *b* (1), et sint numeri *a b* primi ad se invicem, numeri quidem *a b* aut sunt continui, aut non. Sint primum continui, et esto numerus *b* maior quam *a*, et adiaceat unitas *c*, et ab unitate *c* in ordine disponantur tot numeri inpares, quot sunt unitates in numero *b* maiori, qui sunt *d e*, *d f*, et accipiantur quadrati numerorum *e f g*, qui sint fol. 31 r.(r.)

(1) Vedi Fig. 35.

Digitized by Google

numeri *h i k*, dico quod proportio differentie, que est inter quadratum *h*, et quadratum *i* ad differentiam, que est inter quadratos *i k*, est sicut numerus *a* ad numerum *b*, quod ita probatur. Quoniam unitas est *c*, et ab ipsa depositi sunt numeri inpares ordinate *d*, *e*, *f*, *g*, erit *d* 3, et *e* 5, et *f* 7, et *g* 9, et quadratus qui fit a numero *e*, scilicet numerus *h* est 25, et quadratus qui fit a numero *f*, scilicet numerus *i*, est 49, et quadratus qui fit a numero *g*, scilicet numerus *k*, est 81; et quia numeri *d*, *e*, *f*, *g* sunt secundum quantitatem unitatum, que sunt in numero *b*, et numeri *d*, *e*, *f*, *g* sunt IIII^{or}, erit manifestum quod numerus *b* est 4, et numerus *a* est 3, et manifestum quod quadratus qui fit a numero *d*, scilicet a ternario, addit super quadratum qui fit ab unitate *c* unum octonarium, et quadratus qui fit a numero *f*, scilicet numerus *i*, addit super quadratum qui fit a numero *e*, hoc est super numerum *h*, tres octonarios, videlicet secundum quantitatem unitatum, ~~que sunt a numero g,~~ addit super quadratum qui fit a numero *f*, scilicet super quadratum *i*, quatuor octonarios, scilicet secundum quantitatem unitatum, que sunt in numero *b*; quare proportio differentie, que est inter quadratos *h i*, ad differentiam, que est inter quadratos *i k*, est sicut *a* ad *b*, hoc est sicut 3 ad 4. Et si numerus *a* esset 10, et *b* 11, secundum ea que dicta sunt addendi essent 10, et 11, et 21, que inde proveniunt essent radix mediani quadrati, quare 19 erit radix minoris quadrati, et 23 erit radix maioris. Sunt enim 19, et 21, et 23 continui inpares, et est 21 decimus numerus inpar ab unitate. Quare quadratus qui fit ab ipso 21, scilicet 441, addit

F e

e, super quadratum numeri 5 duos octonarios, et quadratus qui fit a numero

f, qui fit a numero 3 nec non et quadratus qui fit a numero g

L. simul

Digitized by Google

super quadratum qui fit a 19, scilicet super 361, decem octonarios, et quadratus qui fit a 23, cum sit undecimus numerus inpar ab unitate, addit super quadratum qui fit a 21, scilicet 529, super 441 undecim octonarios, quare differentia, que est inter 361 et 441, scilicet 80, est ad differentiam, que est inter 441 et 529, | scilicet fol. 34 recto ad 88, sicut 10 ad 11. Nam quam proportionem habet 80 ad 88, eandem habet $\frac{1}{8}$ de 80 ad $\frac{1}{8}$ de 88, scilicet 10 ad 11, quod oportebat ostendere.

Et si non sunt numeri *a b* (1) continui, erunt ipsi numeri aut inpares collaterales, aut non. Sint primum collaterales inpares, et quoniam quadrati, qui sunt a paribus numeris, ordinate ascendunt per quadruplicatam ascensionem inparium numerorum, ut 4, qui est quadratus binarii, scilicet primi paris numeri, qui ascendit per quantitatem unius quaternarii, et 16, qui est quadratus secundi paris numeri, scilicet quaternarii, qui surgit per quadruplicatam ascensionem duorum inparium numerorum, scilicet de 1 et 3, erit manifestum quod unusquisque quadratus par addit duos quaternarios plus super antecedentem quadratum parem, super quaternarios, quos addit ipse antecedens quadratus super suum antecedentem quadratum, hoc ~~est~~ quod tertius quadratus par addit super secundum quadratum parem quinque quaternarios, cum secundus quadratus par addit super primum tres quaternarios, scilicet 16 super 4, et quartus quadratus par addit super tertium quadratum septem quaternarios, et ita accidit omnibus per ordinem. Unde

(1) Vedi Fig. 36

Digitized by Google

cum volumus invenire duas differentias inter tres quadratos numeros, quarum proportio sit sicut duo numeri inpares collaterales, ut dicamus, sicut 11 est ad 13, accipiemus inter pares quadratos continuos, quorum medianus quadratus addat super antecedentem quadratum parem, 11 quaternarios; qui tres quadrati ita possunt inveniri. Addantur 11 cum 13, erunt 24, quorum quarta pars multiplicetur per 2, scilicet per radicem primi paris quadrati, ~~erit 17~~, qui sunt radix mediani quadrati, et 10 erit radix primi quadrati, et 14 erit radix secundi quadrati. Possumus etiam hoc idem invenire inter quadratos, qui fiunt a numeris ascendentibus per ternarium. Verbi gratia volumus invenire duas differentias inter tres quadratos numeros, quarum proportio sit sicut 19 est ad 21, qui sunt collaterales inpares, addemus 19 cum 21 et 40, que proveniunt cum dividemus per 4 et 10, que inde proveniunt multiplicabimus per 3, scilicet per radicem primi quadrati ipsius ordinis, erunt 30, que erit radix mediani quadrati, quare radix minoris quadrati erit 27, et radix maioris erit 33. Nam quadratus qui fit a 30, scilicet 900, addit super quadratum qui fit a 27, scilicet super 729, novenarios 19, et quadratus qui fit a 33, scilicet 1089, addit super 900 novenarios 21, et sic proportio differentie, que est inter 729 et 900, scilicet 171, est ad differentiam que est inter 900, et 1089, scilicet ad 189, sicut 19 ad 21, hoc volumus. Quod etiam invenietur inter quadratos, qui fiunt a numeris ascendentibus per quaternarium, vel quinarium, vel per alium quemlibet numerum.

Et si proportio duarum differentiarum, que sunt inter tres quadratos, fuerit sicut aliquis quadratus *a* ad aliquem

Digitized by Google

quadratum *b*, voluero ipsos tres quadratos invenire. Ponam numerum *c* (1) medium inter *a b* in proportione continua cum possibile. Quia, ut in Euclide habetur, inter duos quadratos numeros unus medius intercidit numerus, et procreabitur numerus *c* ex multiplicatione radicis numeri *a* in radicem numeri *b*, et erit sicut *a* ad *c*, ita *c* ad *b*, sicut *c* est ad *b*, ita *b* sit ad *d*, et erunt numeri *a*, *c*, *d*, *b*, continui proportionales, quare erit sicut *a* ad *b*, ita *c* ad *d*, et sit quadratus numeri *a* numerus *e f*, et quadratus numeri *c*, numerus *e g*, insuper et quadratus numeri *b* numerus *e h*, dico differentias, que sunt inter quadratos *e f*, et *e g*, et *e h*, scilicet numeri *f g*, et *g h*, proportionem habere ad se invicem eam, quam habet quadratus numerus *a* ad quadratum numerum *b*, quod sic probatur. Quoniam numeri *a c b* continue proportionales sunt, est sicut *a* primus ad *b* tertium, ita quadratus numeri *a* primi, ad quadratum numeri *c* secundi, ut in geometria aperte monstratum est. Est enim quadratus numeri *a* numerus *e f*, et quadratus numeri *c* numerus *e g*, ergo est sicut *a* ad *b*, ita numerus *e f* ad numerum *e g*. Rursus quoniam numeri *c b d* continue proportionales, est sicut *c* ad *d*, ita quadratus numeri *c* scilicet numerus *e g*, ad quadratum numeri *b*, scilicet ad numerum *e h*. Sed sicut *c* est ad *d*, ita fuit *a* ad *b*, ergo sicut *a* ad *b*, ita numerus *a g*, ad numerum *e h*. fuit etiam sicut *a* ad *b*. ita *e f*, ad numerum *e g*. Numeri ergo *e f* et *e h* continui proportionales sunt, et quoniam est sicut *e f* ad *e g*, ita *e g* ad *e h*, disiunctim ergo erit sicut *e f* ad *f g*, ita *c g* ad *g h*, permu-

(1) Vedi Fig. 37.

Digitized by Google

latim ergo sicut *e f* ad *e g*, ita *f h* ad *g h*, sed *e f* ad *e g* est sicut *a* ad *b*, ergo sicut *a* ad *b*, ita *f g*, scilicet differentia que est inter quadratos *e f* et *e g*, est ad *g h*, scilicet ad differentiam que est inter quadratos *e g* et *e h*, que etiam ostendantur cum numeris. Esto quidem numerus *a* 16, et numerus *b* 25, quare numerus *c* erit 20, qui procreatur ex ductu radicis de 16, in radicem de 25, et est sicut 16 ad 20, ita 20 ad 25, et erit quadratus numeri *a*, scilicet numerus *e f*, 256, et quadratus numeri *c*, fol. 35 recto scilicet numerus *e g*, 400, et qua | dratus numeri *b*, hoc est numerus *e h*, est 625, unde si ex *e g* auferatur *e f*, remanebunt 144 pro numero *f g*, et si auferatur quadratus *e g* ex quadrato *e h*, scilicet 400 de 625, remanebunt 225 pro numero *g h*, sunt enim 144 ad 225 sicut 16 sunt ad 25, et hoc volui demonstrare.

Et si data proportio duarum differentiarum cadentium inter tres quadratos non fuerit aliqua suprascriptarum, videlicet ex continuis, vel ex inparibus collateralibus numeris, aut duobus quadratis, solutionem quarum ex ascensione octonariorum cadente inter quadratos inpares, que fit ex numeris continue ascendentibus ab unitate, et ex ascensione quaternariorum cadente inter pares quadratos numeros, que fit ex numeris ab unitate ascendentibus per inpares numeros, inveniemus hoc ordine. Ponamus ut proportio duarum differentiarum cadentes (sic) inter tres quadratos numeros, fiat sicut 2 est ad 9. Accipiam primum quadratum qui fit a quinario, qui addit super quadratum sibi ascendentem inparem duos octonarios, et habebo ipsum pro primo quadrato, si possibile fuerit, et proportionabo ipsos duos octonarios cum octonariis, quos

Digitized by Google

addit sequens quadratus inpar super quadratum quinarii, scilicet cum 3 octonariis, et quia proportio de 2 ad 3 non est sicut 2 ad 9, super tres octonarios addam quatuor octonarios, quos addit quadratus novenarii super quadratum septenarii, et erunt septem octonarii, et erit proportio duorum octonariorum ad septem octonarios sicut 2 ad 7, sed proportio de 2 ad 7 est maior proportione quam habet 2 ad 9, quare super 7 octonariis addam multitudinem octonariorum additionis sequentis inparis quadrati, eius videlicet qui fuit ab 11, erunt octonarii 12, ad quem numerum, cum dico habeant minorem proportionem quam ad 9, duplabo numeros proportionis, scilicet 2 et 9, et habebo 4 et 18, et considerabo proportionem quam habet 4 ad sequentem sibi numerum, scilicet ad 5, vel ad duos sequentes numeros, scilicet ad 5 et ad 6, vel ad tres sequentes numeros, donec inveniam inde prnportionem quam habet 4 ad 18, et hoc erit cum accepero a quaternario tres sequentes numeros, scilicet 5 et 6 et 7, qui faciunt 18, ad quem numerum 4 habet proportionem eam quam habet 2 ad 9; et propter hoc inventa est solutio questionis, et habebo pro maiori quadrato ipsum qui est a 15, scilicet 225, que 15 habentur ex duplo de 7, uno addito. et est quadratus, qui fit a 15, addens super quadratum, qui fit ad 13, septem octonarios, | et quadratus, qui fit a 13, addit super quadratum qui fit ab 11, sex octonarios, et quadratus, qui fit ab 11, addit super quadratum qui fit a 9 quinque octonarios, et sic quadratus, qui fit ad 15, addit super quadratum qui fit a 9 quadratos 18, et quadratus, qui fit a 9, addit super quadratum qui fit a 7 quatuor octo- fol. 35 verso

Digitized by Google

narios, et sic proportio differentie, que est inter quadratum qui fit a 7, et quadratum qui fit a 9, scilicet inter 49 et 81, erit ad differentiam, que est inter 81 et 225, sicut 2 ad 9, et hoc est quod volui demonstrare.

Solvuntur etiam omnes suprascripte questiones, et eorum consimiles, in quadratis qui fiunt a duplo, vel a triplo, vel a quolibet alio multiplice numerorum, a quibus fiunt quadrati suprascriptarum inventionum. Verbi gratia fuerunt quadrati suprascripte questionis a 7 et a 9 et a 15; quare si duplicavimus hos tres numeros habebimus pro radice minoris quadrati 14, et pro radice mediani 18, et pro radice maioris 30, et erit similiter proportio differentiarum, que sunt inter quadratos qui fiunt ab ipsis numeris, sicut 2 ad 9, quod ostendam in lineis. Sit linea *a b* (1) 49, scilicet quadratus septenarii, et *a c* sit 81, scilicet quadratus noverarii, et *a d* sit quadratus qui fit a 15, et *e z* sit quadratus qui fit a 14, et *e i* sit quadratus qui fit a 18, et *e t* sit quadratus qui fit a 30. Et quoniam numeri, a quibus fiunt quadrati *e z*, *e i*, *e t*, dupli sunt numerorum, a quibus fiunt quadrati *a b*, *a c*, *a d*, erit unusquisque quadratorum *e z*, *e i*, *e t*, quadruplus sui similis, scilicet *e z* ex *a b*, et *e i* ex *a c*, et *e t* ex *a d*, et quoniam totus *e i* ex toto *a c* quadruplus est, et *e z*, ex *a b* similiter est quadruplus, reliquus *z i* ex reliquo *b c* quadruplus est. Similiter ostendetur *i t* quadruplus esse ex *c d*, quare est sicut *b c* ad *c d*, ita *z i* ad *i t*. Est enim *b c* ad *c d* sicut 2 ad 9, et *z i* ad *i t* est similiter sicut 2 ad 9. Similiter si numeri, a quibus essent quadrati *e z*,

(1) Vedi Fig. 38.

Digitized by Google

e i, *e t*, essent tripli numerorum, a quibus quadrati *a b*, *a c*, *a d*, esset unusquisque quadratorum *e z*, *e i*, *e t* nonuplus sui, similiter quare differentia *z i* esset nonuplus ex differentia *b c*, et differentia *i t* ex differentia *c d*, quare esset sicut *b c* ad *c d*, ita *z i* ad *i t*, et hoc volui demonstrare.

Et si proportio duarum differentiarum, que sunt in tres quadratos, fuerit sicut 11 est ad 43, erit primus quadratus 25, secundus 729, tertius 3481, quos hoc ordine inveni. Posui primum pro mediano quadrato quadratum qui fit a 23, cum ipse addat 11 octonarios super quadratum qui fit a 21, et investigavi proportionem, quam habet 11 ad primum sequentem sibi numerum, vel ad duos, vel ad plures, et non inveni cum ipsis numeris proportionem, quam habet 11 ad 43, quia si addatur 12 et 13 et 14, que secuntur 11 in ordine numerorum, non faciunt ultra 39, ad quem numerum 11 habet maiorem proportionem quam ad 43, et si cum ipsis 39 addatur sequens numerus, scilicet 15, veniunt 54, ad quem numerum 11 habet minorem proportionem quam ad 43, et propter hoc duplicavi 11 et 43, et triplicavi etiam, et per unumquemque numerorum qui sunt usque in 7 multiplicavi eos, et non inveni inter continuos numeros proportionem quam querebam, ad extremum octuplicavi 11 et 43, et habui 88 et 344, et divisi 88 per 11, et provenerunt 8, circa quem posui decem numeros sibi continuos, et fuit 8 medius inter eos, et fuerunt 15 numeri, qui insimul aggregati faciunt 88, ex quibus minor numerus est 3, maior 13, et duplicavi 13, et addidi 5, et provenerunt 27; cuius quadratus addit octonarios 13, su-

Digitized by Google

per quadratum qui fit a 25, et quadratus qui fit a 25 addit 12 octonarios super quadratum, qui fit a 23, et sic investigando inveni quadratum qui fit a 27 addere super quadratum qui fit a 5 octonarios 88, qui proveniunt ex aggregatione numerorum, qui sunt a 13 usque in 3, scilicet ex undecim numeris ordinatis.

Deinde accepi 14 cum suis sequentibus numeris usque in 29, et aggregavi eos, et habui 344, scilicet octuplum de 43, et super duplum de 29 addidi 1, et habui 59, pro radice maioris quadrati, scilicet de 3481, qui addidit octonarios 29 super quadratum sibi antecedentem inparem, scilicet super eum qui fit a 57, qui quadratus addit super quadratum qui fit a 55 octonarios 28, et sic addendo omnes octonarios, quos addunt antecedentes quadrati, qui sunt a quadrato qui fit a 59, usque ad quadratum qui fit a 27, super suos consequentes, collegi quadratum, qui fit a 59, addere super quadratum, qui fit a 27, octonarios 344, quare proportio differentie, que est inter quadratum qui fit a quinario, et quadratum qui fit a 27, est ad differentiam, que est inter quadratum qui fit a 27, et quadratum qui fit a 59, sicut 11 ad 43, que etiam proportio invenietur in quadratis qui
fol. 36 vers. sunt a duplo, vel ab | alio quolibet multiplice radicum inventarum.

Volo invenire tres quadratos numeros, ut additio primi et secundi, nec non ipsorum trium numerorum, faciat quadratum numerum. Inveniam primum duos quadratos numeros, ex quorum additione proveniat quadratus numerus, et fiant a numeris primis ad se invicem; sint 9
Pu et 16, ex quorum additione proveniunt 25, qui est qua-

Digitized by Google

dratus numerus, et accipiam quadratum qui colligitur ex aggregatione omnium inparium numerorum, qui sunt infra 25, qui quadratus est 144, cuius radix est medietas duorum extremorum ipsorum inparium numerorum, scilicet de 1 et 23. Ex aggregatione quidem de 144 et 25 proveniunt 169, qui numerus quadratus est, et sic inventi sunt tres numeri quadrati, quorum duo nec non et omnes simul aggregati faciunt quadratum numerum, super quem etiam quadratum si addatur quadratus numerus, qui colligitur ex omnibus inparibus numeris, qui sunt ab uno usque in 167, cuius quadrati radix est 84, scilicet medietas de 168, proveniunt 7225, qui numerus est quadratus, et eius radix est 85, et sic inventi sunt quatuor quadrati, quorum duo, vel tres, nec non et omnes simul coniuncti, faciunt quadratum numerum, super quibus etiam 7225 possumus tres quadratos diversos addere, et cum unoquoque ipsorum faciet quadratum numerum, ex quibus est quadratus proveniens ex omnibus inparibus numeris, qui sunt infra 7225, cuius radix est 3612. Secundus vero quadratus provenit ex aggregatione omnium inparium numerorum, qui sunt sub quinta parte de 7225, detractis inde duobus inparibus eidem quinte parti collateralibus, cuius quadrati radix est 720. Tertius quidem quadratus provenit ex inparibus ipsius $\frac{1}{15}$ partis collateralibus, cuius quadrati radix est 132, et sic possunt infiniti quadrati numeri invenire, qui disiuncti, et simul aggregati, secundum infrascriptum ordinem, faciunt numerum quadratum.

Digitized by Google

Questio mihi proposita a Magistro Theodoro domini imperatoris phylosopho.

Volo invenire tres numeros, qui insimul aggregati cum quadrato primi numeri faciant quadratum numerum, super quem quadratum si addatur quadratus secundi egrediatur inde quadratus numerus, cum quo quadrato addito quadrato tertii, similiter quadratus numerus inde proveniat. Inveniendi sunt primi tres numeri quadrati, quo-
fol. 37 recto rum duo simul aggregati faciant quadratum numerum | ex aggregatione ipsorum trium veniat item quadratus numerus, et minor eorum sit plus radicibus reliquorum duorum quadratorum. Sintque 36 et 64 et 576, et erit radix secundi numeri 8, tertii 24, que radices habentur pro secundo et tertio numero quesitorum trium numerorum, et ponam pro primo numero radicem, et aggregabo hos tres numeros simul, et habebo 32 et radicem, super quem addam quadratum radicis, et habebo 32 et quadratum et radicem, que omnia volo ut equentur primo posito quadrato, scilicet 36, et auferam ab utraque parte 32, et remanebunt quadratus et radix equales IIII^{or} unitatibus. Unde qualiter in similibus operandum sit, ponam pro quadrato quadratum *a c* (1), cuius unumquodque latus sit equale posite radici, et addam ei superficiem *d e* rectiangulam, que sit una radix quadrati *a c*, quare *c e* erit 1, et *d c* est radix, cum sit unum ex lateribus quadrati *a c*,

(1) Vedi Fig. 39.

Digitized by Google

et dimiabo *c e* super *f*, et erit unaqueque sectionum *c f* et *f e* medietas unius. Et quia invenimus quadratum et radicem equari IIII^{or} unitatibus, erit manifestum quod superficies *a e* rectiangula erit 4, que superficies provenit ex *a b* in *b e*, hoc est ex *b c* in *b e*, et quia linea *c e* divisa est in duo equa super *f*, et in directo eius addita est quedam recta *c b*, erit superficies *b c* in *b e*, cum quadrato linee *c f*, equalis quadrato linee *b f*. Sed ex *b c* in *b e* proveniunt 4, quibus si addatur quadratus numeri *c f*, qui est $\frac{1}{4}$, habebuntur $\frac{1}{4}$ 4 pro quadrato numeri *b f*, qui numerus cum non habeat radicem, dicemus numerum *b f* esse radicem de $\frac{1}{4}$ 4, de quo si auferatur numerus *c f*, qui est $\frac{1}{2}$ unius, remanebit pro radice *b c* radix de $\frac{1}{4}$ 4 minus $\frac{1}{2}$ unius, qui numerus sit inratictinatus, habebitur pro primo numero quesito, et secundus erit 8, tertius 24. Verbi gratia ex aggregatione quidem horum trium numerorum habentur $\frac{1}{2}$ 31, et radix de $\frac{1}{4}$ 4, super quam aggregationem si addamus quadratum primi numeri, qui est $\frac{1}{4}$ 4 minus radice de $\frac{1}{4}$ 4, habebuntur 36, qui numerus quadratus est. Super quem si addantur 64, scilicet quadratus secundi numeri, venient 100, qui numerus quadratus est, et radix eius est 10. Super quem quadratum si addantur 576, scilicet quadratus tertii numeri, habentur 676, qui numerus quadratus est, et radix eius est 26, et hoc volumus.

Et ut solutio questionis suprascripte habeatur in numetis ratiocinatis, ostendendum | est primum quod quando fol. 37 verso
quarta unius integri additur super aliquem numerum contemptum sub duobus numeris ratiocinatis, quorum unus excedat alterum in 1, procreatur inde quadratus nume-

Digitized by Google

rus, quod ostendatur in superficie *a g* (1), que contineatur sub duobus numeris ratiocinatis, quorum maior excedat alterum in 1, qui sunt *a b*, et *b g*, et maior eorum esto *b g*, et auferatur a maiori *b g* unitas *g d*, remanebit numerus *b d* equalis numero *a b*, et dividatur unitas *g d* in duo equa super *e*. et erit *d e* medietas unius integri. Quare *d e* medietas est ratiocinata, est enim et numerus *b d* ratiocinatus, quare totus *b e* numerus ratiocinatus est, et quadratus, qui fit ab ipso, ratiocinatus est, cui quadrato equatur superficies, que fit ex *b d* in *b g*, hoc est ex *a b* in *b g*, cum quadrato qui fit a *d e*. Sed quadratus, qui fit ex *d e*, est $\frac{1}{4}$ unius, et numerus, qui provenit ex *a b* in *b g*, est contemptus sub duobus numeris ratiocinatis, quorum unus excedit alium in 1, ergo cum additur $\frac{1}{4}$ cum numero facto a duobus numeris, quorum unus addat super alterum 1, provenit inde quadratus numerus, et hoc volui demonstrare.

Et notandum quod omnes numeri integri, qui fiunt a duobus collateralibus, scilicet continuis, proveniunt ex ordinata parium numerorum aggregatione. Nam 2, qui provenit ex unitate ducta in 2, habetur ex primo pari numero, et 6, qui fiunt ex ductis 2 in 3, habentur ex aggregatione primorum duorum parium numerorum, et 12, que veniunt ex 3 ductis in 4, habentur ex aggregatione trium parium numerorum, scilicet de 2 et 4 et 6. et hoc eodem ordine ex decem paribus numeris provenit numerus factus ex 10 vicibus 11, quod idem intelligatur in omnibus reliquis numeris, qui fiunt a duobus continuis

(1) Vedi Fig. 40.

Digitized by Google

numeris integris. Et sciendum est quod omnis inpar numerus est aggregatio duorum numerorum continuorum, unde quilibet inpar numerus potest dividi in duos numeros continuos, ut 7 qui dividitur in 3 et 4.

Nunc ostendere volo quod quando de aliquo quadrato numero tolluntur aliquot radices eius, et numerus ipsarum radicum dividatur in duas partes, quarum una addat super alteram 1, et multiplicetur una ipsarum partium per aliam, quod provenerit addatur cum residuo quod de quadrato remanet, radicibus dentis, veniet inde numerus contemptus sub duobus numeris inequalibus, quorum maior addit 1 super minorem. Ad quod demonstrandum, adiaceat | tetragonum *a g* (1), et tollatur ex fol. 98 recto
eo aliquot radices eius, que radices contineant superficiem *e g*, quare numerus *f g* continet tot unitates, quot radices ex quadrato *a g* sunt in superficie *e g*, et dividatur numerus *f g* in duas partes, quarum maior addat 1 super minorem, que sint *f i*, *i g*, maior earum sit *i g*. Dico quod cum de quadrato *a g* tollitur superficies *e g*, residuum, scilicet superficies *a f*, cum superficie, que fit ex *i f* in *i g*, facit numerum factum ex duobus inequalibus numeris, quorum maior addit minorem, et hoc est de quadrato *a g* tollere superficies *e g* minus superficie que fit ex *i f* in *i g*. Ponamus siquidem numerum *g h* equalem numero *i f*, et remanebit *i h* unum, quod dividatur in duas medietates, que sunt *z i*, *z h*, et erit totus *f g* divisus in duo equalia super *z*, et in duo inequalia super *i*. Quare multiplicatio *f i* in *i g* cum quadrato, qui fit ab

(1) Vedi Fig. 41.

Digitized by Google

i z, equatur quadrato numeri *f z*. Rursus quoniam numerus *f g* divisus est in duo equa super *z*, et ei additus est numerus *d f*, erit multiplicatio *b g* in *b f*, hoc est multiplicatio *a b* in *b f*, cum quadrato numeri *f z*, equalis quadrato numeri *b z*, sed quadrato numeri *f z* equalis est superficies *f i* in *i g*, cum quadrato, qui fit ab *i z* medietate. Ergo multiplicatio *a b* in *b f*, hoc est superficies *a f*, cum multiplicatione *f i* in *i g*, et cum quadrato numeri *i z*, equatur quadrato numeri *b z*. Rursus quoniam *i h* unitas divisa est in duo equa super punctum *z*, et ei additus est numerus *b i*, erit multiplicatio *b i* in *b h*, cum quadrato *i z*, equalis, sed quadrato *b z* equales sunt superficies *a f* et superficies *f i* in *i g*, cum quadrato *i z*, ergo superficies *b i* in *b h*, cum quadrato *i z*, equalis est superficiebus *a f* et *f i*, in *i g*, et quadrato *i g*. Comuniter auferatur quadratus ex *i z*, remanebit superficies *a f*, cum superficie *f i* in *i g*, equalis superficiei *b i* in *b h*, sed superficies *b i* in *b h* fit ex duobus numeris, quorum unus addit 1 super alterum, qui sunt *b i* et *b h*, est enim *i h* 1. Que etiam ostendantur cum numeris. Quadratus quidem *a g* sit 100, et erit unumquodque latus 10, et auferantur a quadrato *a g* 7 radices eius minus multiplicatione *f i* in *i g*, que radices sint superficies *e g*, remanebit superficies *a f* 30, cum quibus si addatur multiplicatio *f i* in *i g*, hoc est de 3 in 4, venient 42, qui numerus surgit ex *b i* in *b h*, hoc est de 6 in 7,
fol. 38 verso est | enim totus *b g* 10, de quibus si auferatur *f g* numerus, qui est 7, remanent 3 pro numero *b f*, quibus si addatur *f i*, qui est 3, erit 6 totus numerus *b i*, cui si addatur unitas *i h* habebuntur 7 pro numero *b h*. Et

Digitized by Google

postquam hec omnia demonstrata sunt, redeamus ad questionem phylosophi, et procedamus predicto modo, donec habeamus quod census et radix et 32 equantur quadrato de 36, deinde videamus quot radices sunt 32 de 36, hoc est quod dividamus 32 per radicem de 36, venient radices $\frac{1}{3}$ 5, et propter hoc, ut inveniamus solutionem predicte questionis in posita proportione trium quadratorum (1) supradictorum, scilicet de 36 et de 64 et de 576, oportet ut inveniamus quadratum aliquem, de quo extractis radicibus $\frac{1}{3}$ 5 ipsius, remaneat numerus qui procreatur ex multiplicatione dictorum numerorum inequalium, quorum maior addit 1 super minorem. Quod inveniemus si posuerimus numerum aliquot radicum superhabundantem predictas radices $\frac{1}{3}$ 5; quod quidem possemus facere in infinitis modis. Unde ponamus ad libitum radices 7, et dividamus 7 in duas partes, quarum una addat 1 super alteram, eruntque 3 et 4, et multiplicetur 3 per 4, faciunt 12, et nos scimus per ea que dicta sunt, quod quando de aliquo quadrato tolluntur 7 radices eius minus 12, remanebit de ispo quadrato numerus procreatus ex duobus numeris, quorum maior addit 1 super minorem. Et nos volumus invenire quadratum, de quo extractis radicibus $\frac{1}{3}$ 5, remaneat similiter numerus procreatus ex duobus numeris, quorum unus addat 1 super alium, ergo radices $\frac{1}{3}$ 5 ipsius quadrati, quem querimus, equantur radicibus 7 eiusdem quadrati minus 12, quare si addamus 12 utrique parti, erunt radices $\frac{1}{3}$ 5 et 12 dragme, que equan-

(1) In questo luogo nel margine del ms. leggesi la seguente postilla: *Huc usque est scriptus quaternus dni. R. cardinalis.*

Digitized by Google

tur 7 radicibus. Tollantur ergo ab utraque parte radices $\frac{1}{5}$ 5, remanebit radix $\frac{3}{5}$ 1, que equantur unitatibus 12. Triplicemus ergo hec omnia, et erunt quinque radices equales 36, unde si 36 diviserimus per 5 habebimus $\frac{1}{5}$ 7 pro radice quesiti quadrati $\sqrt{6}$, ergo proportionaliter est sicut 6 ad $\frac{1}{5}$ 7, ita 8 et 24 ad radicem secundi et tertii quadrati. Sed $\frac{1}{5}$ 7 addit super quintam partem ipsius, quare si super 8 et super 24 addamus quintam eorum habebimus pro radice secundi quadrati $\frac{3}{5}$ 9, et pro radice tertii $\frac{4}{5}$ 28, et erit $\frac{3}{5}$ 9 secundus numerus ex tribus quesitis numeris, et $\frac{4}{5}$ 28 erit tertius; et est adhuc primus numerus ignotus, qui cum | fuerit additus cum secundo et tertio numero predictis, et cum quadrato ipsius primi numeri, faciet quadratum de $\frac{1}{5}$ 7, qui quadratus est $\frac{14}{25}$ 51. Quare ponamus pro primo numero radicem, et addemus eam cum $\frac{3}{5}$ 9 et cum $\frac{4}{5}$ 28, et habebimus radicem et $\frac{2}{5}$ 38, quibus addemus quadratum radicis, et habebimus quadratum et radicem et $\frac{2}{5}$ 38, que equantur dragmis $\frac{14}{25}$ 51. Tollamus ergo ab utraque parte $\frac{2}{5}$ 38, remanebit census, et radix, que equatur dragmis $\frac{13}{25}$ 13, super quem addamus $\frac{1}{4}$, scilicet quadratum medietatis radicis, ut superius fecimus, et habebimus $\frac{9}{10}$ $\frac{6}{10}$ 13, que sunt centexime 1369, dividamus ergo radicem de 1369, scilicet 37 per 100, venient $\frac{7}{10}$ 3, de quibus tollamus $\frac{1}{2}$ pro mediatate radicis, remanebunt $\frac{1}{5}$ 3 pro primo numero, et sic soluta est hec questio in numeris ratiocinatis, et secundum hunc modum potest solvi in infinitis modis.

Solvi etiam hanc questionem in numeris integris, quorum primus fuit 35, secundus 144, tertius 360, quorum aggregatio surgit in 539, super quibus addito quadrato primi numeri, scilicet 1225, veniunt 1764, qui numerus

Digitized by Google

quadratus est, et eius radix est 42, super quo quadrato addito quadrato numeri secundi, qui est 20736, veniunt 22500, qui numerus quadratus est, et radix eius est 150, super quo quadrato addito quadrato tertii numeri, scilicet 129600, veniunt 152100, qui numerus quadratus est, et radix eius est 390. Quos numeros inveni ex positione horum trium quadratorum, scilicet de 49 et 576, et de 3600, quorum duo, nec non et ipsi tres simul additi, faciunt quadratum numerum. Et aggregavi radices secundi et tertii, scilicet 24 et 60, fuerunt 84, que divisi per radicem primi quadrati, scilicet per 7, et venerunt 12, et propter hoc oportuit me invenire quadratum numerum, de quo cum tollerem 12 radices eius, remaneret numerus factus ex duobus numeris inequalibus, quorum unus addet 1 super alium. Unde accepi 13, et divisi ipsum in partes continuas, scilicet in 6 et 7, que multiplicavi insimul, et fuerunt 42, et oportuit me invenire quadratum, cuius 13 radices minus 42 dragmis, equerentur 12 radicibus eiusdem, et processi postea predicto ordine, et habui numeros suprascriptos, ex quibus etiam quadratis inveni hos alios tres numeros, scilicet $\frac{1}{3}$ 10, et 64, et 160. Et non solum per hunc modum tres numeri diversis modis possunt inveniri, sed etiam invenientur quatuor cum quatuor numeris quadratis, quorum duo per ordinem, et tres, nec non et omnes simul coniuncti, | fuerint quadratum numerum. Ego autem cum his quatuor quadratis numeris, scilicet cum . . . . et . . . . et . . . . et . . . . (1) fol. 39 verso

(1) Le quattro lacune indicate con punti nella linea vigesimasettima di questa pagina trovansi nel rovescio della carta 39 del Codice Ambrosiano *E. 75 parte superiore.*

Digitized by Google

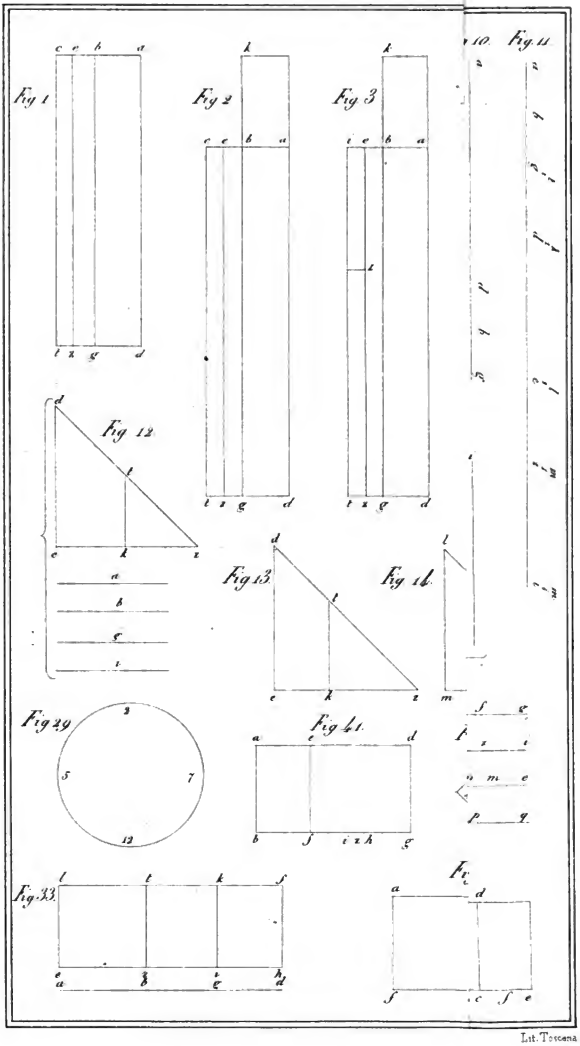
inveni hos quatuor numeros, quorum primus est 1295, secundus $\frac{1}{2}$ 4566, tertius $\frac{1}{2}$ 11417, quartus vero est 79920, et eorum aggregatio est 97199. Super quo numero si addatur quadratus primi numeri, scilicet 1677025, venient 1774224, qui numerus quadratus est, et eius radix est 1332. Super quo etiam quadrato (1).

(1) Così finisce in tronco il rovescio della carta 39 del Codice Ambrosiano *E.* 75 *parte superiore.* Il rimanente di questo Codice è interamente bianco.

UNIV. OF MICHIGAN,

APR 12 1912

Digitized by Google



Lit. Toscana

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06828 2964

Digitized by Google